ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 50

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, И. Ц. ГОХБЕРГ

РАЗБИЕНИЕ ФИГУР НА МЕНЬШИЕ ЧАСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

513
Б 79
УДК 513

Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.

Б 79 Разбиение фигур на меньшие части, М., «Наука», 1971, 88 стр. с илл. («Популярные лекции по математике», вып. 50), 15 к.

В книге популярно излагаются некоторые теоремы, относящиеся к недавно сформировавшемуся разделу математики — комбинаторной геометрии.

Предназначена для учащихся 8—10 классов, интересующихся математикой, студентов и преподавателей математики.

2-2-3
75-71

513

Владимир Григорьевич Болтянский
Израиль Цудикович Гохберг

РАЗБИЕНИЕ ФИГУР НА МЕНЬШИЕ ЧАСТИ
(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1971 г., 88 стр. с илл.

Редактор *Н. П. Рябенькая*
Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 10/VII 1970 г. Подписано к печати 10/II 1971 г. Бумага 84×108¹/₃₂
Физ. печ. л. 2,75. Условн. печ. л. 4,62. Уч.-изд. л. 4,5.
Тираж 100000 экз. Т-02173. Цена книги 15 коп. Заказ 990.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

2-2-3
75-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4

Глава I. Разбиение фигур на части меньшего диаметра 5
§ 1. Диаметр фигуры 5
§ 2. Постановка задачи 6
§ 3. Теорема Борсука 9
§ 4. Выпуклые фигуры 13
§ 5. Фигуры постоянной ширины 19
§ 6. Вложение в фигуру постоянной ширины 21
§ 7. Для каких фигур $a(F) = 3$? 26

Глава II. Разбиение фигур на плоскости Минковского 34
§ 8. Наглядный пример 34
§ 9. Плоскость Минковского 37
§ 10. Задача Борсука на плоскости Минковского . . 43

Глава III. Покрытие выпуклых фигур гомотетичными 50
§ 11. Постановка задачи 50
§ 12. Другая формулировка задачи 52
§ 13. Решение задачи о покрытии 53
§ 14. Доказательство теоремы 4 64

Глава IV. Задача освещения 67
§ 15. Постановка задачи 67
§ 16. Решение задачи освещения 69
§ 17. Эквивалентность двух задач 71
§ 18. Разбиение и освещение неограниченных выпуклых фигур 76
Примечания 80

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена нескольким связанным между собой вопросам нового интенсивно развивающегося направления в математике, которое носит название к о м б и н а т о р н о й г е о м е т р и и. Рассматриваемые здесь вопросы объединены одной общей идеей о разрезании фигуры на несколько меньших частей. Что такое «меньшая часть», можно понимать по-разному, в связи с чем и возникает несколько различных задач, рассматриваемых в этой книге. Все доказываемые здесь теоремы являются очень «молодыми»: самая «старая» из них была найдена польским математиком К. Борсуком примерно 40 лет назад. Эта теорема Борсука является тем стержнем, вокруг которого развертывается все дальнейшее изложение. Самой «молодой» теореме едва исполнился год.

Вопросы, которым посвящена книга, вполне доступны школьникам старших классов. В то же время книга подводит читателя к ряду перспективных проблем геометрии.

Этому же кругу вопросов была посвящена книга тех же авторов «Теоремы и задачи комбинаторной геометрии» («Наука», 1965). Однако там основное внимание было уделено проблемам, возникающим в трехмерном пространстве и пространствах большего числа измерений. Настоящая книга, напротив, посвящена исключительно вопросам геометрии на плоскости. Благодаря этому книга может быть применена в работе школьных математических кружков. Книга «Теоремы и задачи комбинаторной геометрии», упоминавшаяся выше, будет полезна заинтересовавшимся читателям в качестве материала для дальнейшего чтения *).

Помещенные в конце книги примечания ([1]), ([2]) и т. д. предназначены для более подготовленного читателя.

Берег Днестра, близ Тирасполя
20 августа 1969 г.

В. Болтянский, И. Гохберг

---

*) Вот еще пара книг, посвященных вопросам комбинаторной геометрии: Х а д в и г е р и Д е б р у н н е р, Комбинаторная геометрия плоскости, «Наука», 1965; Д а н ц е р, Г р ю н б а у м, К л и, Теорема Хелли и ее приложения (перевод с англ.), «Мир», 1968.

ГЛАВА I

РАЗБИЕНИЕ ФИГУР НА ЧАСТИ МЕНЬШЕГО ДИАМЕТРА

§ 1. Диаметр фигуры

Рассмотрим круг диаметра d. Расстояние между любыми двумя точками M и N этого круга (рис. 1) не превосходит d. В то же время можно найти две точки A и B нашего круга, удаленные друг от друга в точности на расстояние d.

Рассмотрим теперь вместо круга какую-либо другую фигуру. Что можно назвать «диаметром» этой фигуры?

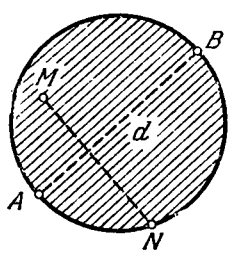


Рис. 1.

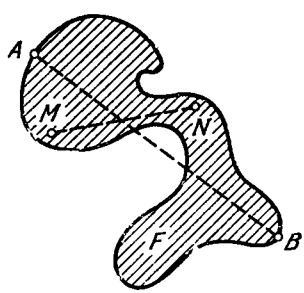


Рис. 2.

Сказанное выше наводит на мысль назвать диаметром фигуры *наибольшее* из расстояний между ее точками. Иначе говоря, *диаметром фигуры* F (рис. 2) *мы будем называть такое расстояние* d, *что, во-первых, расстояние между любыми двумя точками* M *и* N *фигуры* F *не превосходит* d, *и, во-вторых, можно отыскать в фигуре* F *хотя бы одну*

пару точек A, B, расстояние между которыми в точности равно d (1).

Пусть, например, фигура F представляет собой полукруг (рис. 3). Обозначим через A и B концы ограничивающей его полуокружности. Тогда ясно, что диаметром фигуры F является длина отрезка AB. Вообще, если фигура F представляет собой сегмент круга, ограниченный дугой l и хордой a, то в случае, когда дуга l не превосходит полуокружности (рис. 4, *а*), диаметр фигуры F равен a (т. е. длине хорды); в случае же, когда дуга l больше полуокружности (рис. 4, *б*), диаметр фигуры F совпадает с диаметром всего круга.

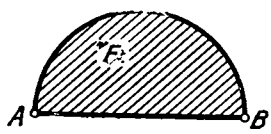


Рис. 3.

Легко понять, что если F представляет собой многоугольник (рис. 5), то его диаметром является наибольшее из расстояний между вершинами (2). В частности, диаметр любого треугольника (рис. 6) равен длине его наибольшей стороны.

Заметим, что если диаметр фигуры F равен d, то в фигуре F может существовать и много пар точек, расстояние между которыми равно d. Например, в случае эллипса (рис. 7) такая пара точек только одна, в случае квадрата (рис. 8) их две, в случае правильного треугольника (рис. 9) — три, наконец, в случае круга таких пар точек бесконечно много.

§ 2. Постановка задачи

Нетрудно понять, что если круг диаметра d разрезать некоторой линией MN на две части, то хотя бы одна из этих частей будет иметь тот же диаметр d. В самом деле, если M' — точка, диаметрально противоположная точке M, то она должна принадлежать какой-нибудь из частей, и эта часть (содержащая точки M, M') будет иметь диаметр d (рис. 10, *а*, *б*) (3). Вместе с тем ясно, что круг можно разрезать на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший d (рис. 11, *а*, *б*).

Итак, круг диаметра d нельзя разбить на две части, диаметр каждой из которых будет меньше d, но можно разбить на три такие части. Тем же свойством обладает равносторонний треугольник со стороной d (если он разбит

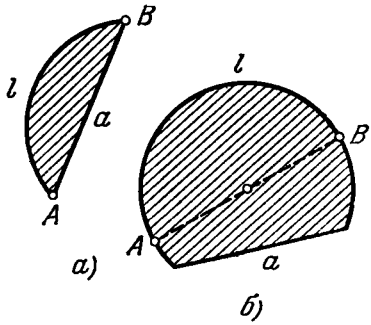


Рис. 4.

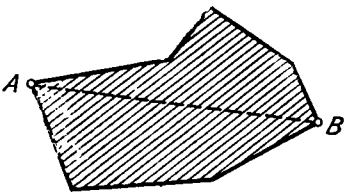


Рис. 5.

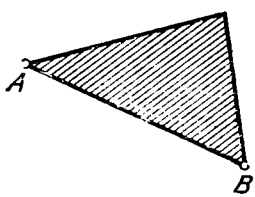


Рис. 6.

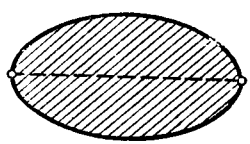


Рис. 7.

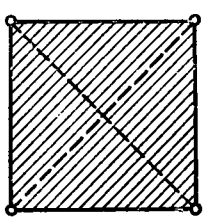


Рис. 8.

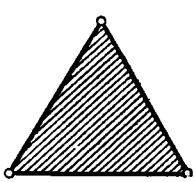


Рис. 9.

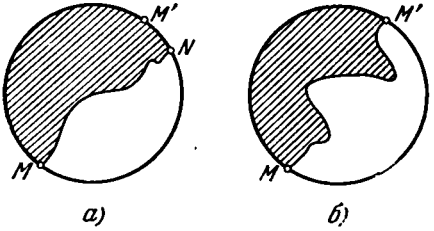


Рис. 10.

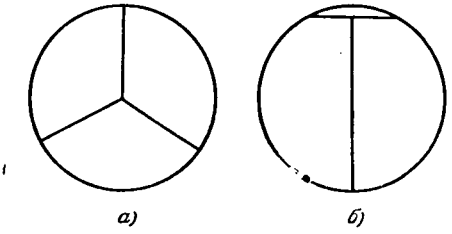


Рис. 11.

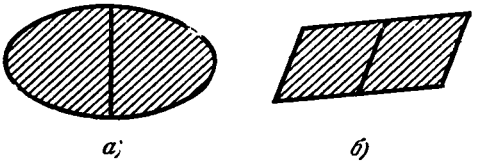


Рис. 12.

на две части, то какая-нибудь из частей должна содержать д в е вершины треугольника, и диаметр этой части будет равен d). Но имеются фигуры, которые можно разбить на д в е части меньшего диаметра (рис. 12, *а*, *б*).

Мы можем рассматривать для любой фигуры F задачу о разбиении ее на ч а с т и м е н ь ш е г о д и а м е т р а ([4]). Наименьшее число частей, которые для этого потребуются, обозначим через $a(F)$. Таким образом, если F — круг или равносторонний треугольник, то $a(F) = 3$, а для эллипса или параллелограмма $a(F) = 2$.

Задачу о том, какие значения может принимать $a(F)$, поставил и решил (в 1933 г.) известный польский математик К. Борсук ([5]).

§ 3. Теорема Борсука

Мы уже видели, что для одних плоских фигур $a(F)$ принимает значение 2, а для других — значение 3. Возникает вопрос, нельзя ли найти плоскую фигуру, для которой $a(F) > 3$, т. е. такую фигуру, что для разбиения ее на части меньшего диаметра нельзя обойтись тремя частями, а потребуется 4 или большее число частей? Оказывается, что на самом деле трех частей всегда достаточно, т. е. имеет место следующая теорема, установленная Борсуком:

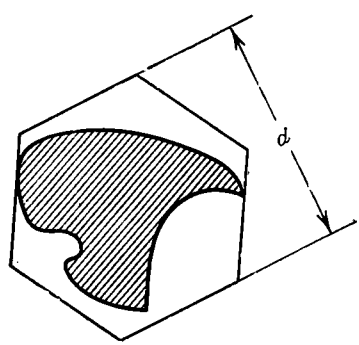


Рис. 13.

Т е о р е м а 1. *Всякая плоская фигура F диаметра d может быть разбита на три части диаметра меньше d, т. е. $a(F) \leqslant 3$.*

Основную часть доказательства составляет следующая лемма, которую в 1920 г. получил венгерский математик Пал:

Л е м м а 1. *Всякая плоская фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно d* (рис. 13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем прямую l, не пересекающую фигуры F, и начнем приближать эту прямую к F (оставляя ее параллельной самой себе) до тех пор, пока перемещающаяся прямая не прикоснется к фигуре F

(рис. 14). Полученная прямая l_1 обладает тем свойством, что она имеет хотя бы одну общую точку с фигурой F и вся фигура F расположена по одну сторону от l_1. Такая прямая называется *опорной прямой* фигуры F [6]. Проведем, кроме того, вторую опорную прямую l_2, параллельную l_1 (рис. 14). Ясно, что вся фигура F будет находиться в полосе между прямыми l_1 и l_2 и что расстояние между этими прямыми не превосходит d (так как диаметр фигуры F равен d).

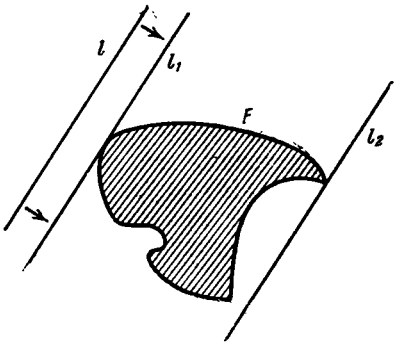


Рис. 14.

Проведем теперь к фигуре F две параллельные опорные прямые m_1, m_2, составляющие с l_1 угол 60° (рис. 15). Прямые l_1, l_2, m_1, m_2 образуют параллелограмм $ABCD$ с углом 60° и высотами, не превосходящими d, внутри которого целиком заключается фигура F.

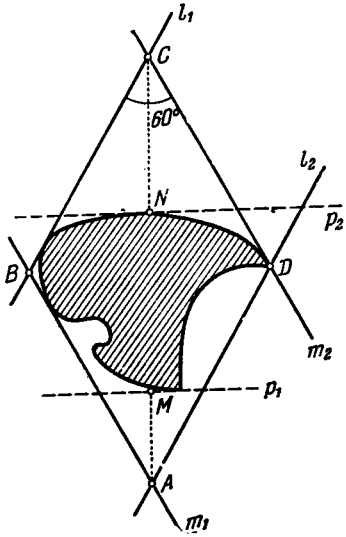


Рис. 15.

Проведем теперь две опорные прямые p_1, p_2 фигуры F, составляющие с l_1 угол 120°, и обозначим через M и N основания перпендикуляров, опущенных на эти прямые из концов диагонали AC параллелограмма (рис. 15). Мы покажем, что направление прямой l_1 можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство $AM=CN$. В самом деле, допустим, что $AM \neq CN$, и пусть, для определенности, $AM < CN$. Таким образом, величина $y = AM - CN$ отрицательна. Теперь мы начнем непрерывно изменять направление прямой l_1 так, чтобы она

повернулась на 180° (фигуру F будем оставлять неподвижной). Вместе с прямой l_1 будут менять свое положение и остальные прямые l_2, m_1, m_2, p_1, p_2 (так как их положение полностью определяется выбором прямой l_1). Поэтому при повороте прямой l_1 будут непрерывно перемещаться и точки A, C, M, N (7), а значит, будет непрерывно изменяться величина $y=AM-CN$. Но когда прямая l_1 повернется на 180°, она займет положение, которое раньше занимала прямая l_2. Поэтому мы получим тот же параллелограмм, что и на рис. 15, но в нем точки A и C, а также M и N поменяются «ролями». Следовательно, в этом положении величина y будет уже положительной. Если мы теперь изобразим график изменения величины y при повороте прямой l_1 от 0° до 180° (рис. 16), то увидим, что найдется положение прямой l_1, при котором величина y обращается в нуль, т. е. $AM = CN$ (ибо, непрерывно изменяясь от отрицательного значения до положительного, величина y должна в некоторый момент обратиться в нуль). Мы рассмотрим положение всех

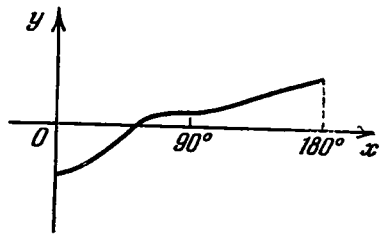


Рис. 16.

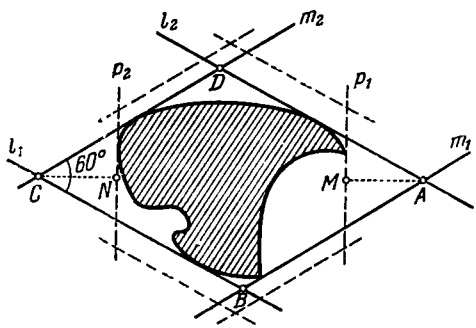


Рис. 17.

наших прямых как раз в тот момент времени, когда величина y обращается в нуль (рис. 17). Из равенства $AM = CN$ вытекает, что шестиугольник, образованный

прямыми $l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$, центрально-симметричен. Каждый угол этого шестиугольника равен 120°, а расстояние между противоположными сторонами не превосходит d. Если расстояние между p_1 и p_2 меньше d, то мы раздвинем эти прямые (перемещая их на одинаковое расстояние) так, чтобы расстояние между раздвинутыми прямыми было равно d. Точно так же мы поступим с прямыми l_1, l_2, а затем с прямыми m_1, m_2. В результате мы получим центрально-симметричный шестиугольник (с углами 120°), у которого противоположные стороны удалены друг от друга на расстояние d (пунктирный шестиугольник на рис. 17). Из сказанного ясно, что все стороны этого шестиугольника равны между собой, т. е. этот шестиугольник—правильный, причем фигура F расположена внутри шестиугольника.

Доказательство теоремы 1. Пусть F — фигура диаметра d. Согласно доказанной лемме, фигура F содержится внутри правильного шестиугольника, расстояние между противоположными сторонами которого равно d. Покажем, что этот правильный шестиугольник можно разрезать на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший d. При этом фигура F также разрежется на три части, диаметр каждой из которых и подавно будет меньше d. Требуемое разбиение правильного шестиугольника на три части показано на рис. 18 (точки P, Q и R являются серединами сторон, а O — центр шестиугольника). Чтобы убедиться, что диаметры частей меньше d, достаточно заметить, что в треугольнике PQL угол Q прямой, и потому $PQ < PL = d$.

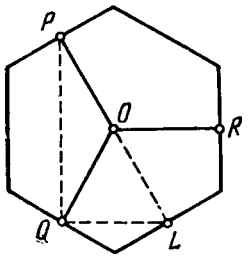


Рис. 18.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы 1 легко заключить, что *всякая плоская фигура диаметра d может быть разбита на три части, диаметр каждой из которых не превосходит* $d\sqrt{3}/2 \approx 0{,}8660\,d$ (так как из равенства $PL = d$ легко вытекает, что $PQ = d\sqrt{3}/2$; см. рис. 18). Эта оценка диаметров частей является наилучшей, ибо, как легко видеть, *круг диаметра d нельзя разбить на три части, диаметр каждой из которых был бы меньше* $d\sqrt{3}/2$.

В самом деле, часть, имеющая диаметр меньше $d\sqrt{3}/2$, высекает на окружности множество, расположенное на дуге, меньшей 120°, поэтому три такие части не покрывают всей окружности.

§ 4. Выпуклые фигуры

Теорема Борсука не дает еще полного решения вопроса о том, чему равно число $a(F)$ для произвольной заданной фигуры F диаметра d. Она дает лишь оценку числа $a(F)$ сверху: $a(F) \leqslant 3$. В то же время очевидно, что $a(F) \geqslant 2$ для любой фигуры F. Естественно возникает задача: выяснить, для каких плоских фигур F число $a(F)$ равно двум и для каких оно равно трем. Решение этой задачи будет приведено в § 7. При изложении этого решения нам потребуются некоторые сведения о выпуклых фигурах, которые мы рассмотрим в этом и двух следующих параграфах, как правило, без доказательств, лишь с наглядными пояснениями *).

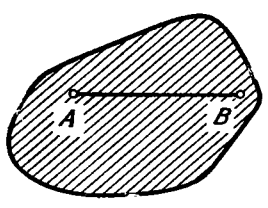


Рис. 19.

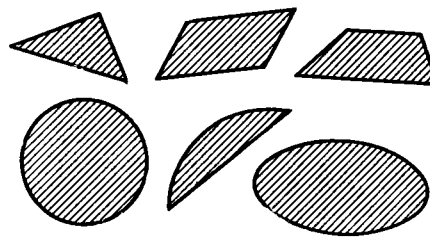


Рис. 20.

Фигура F называется *выпуклой*, если вместе с каждыми двумя точками A и B она содержит и весь соединяющий их отрезок AB (рис. 19). Так, например, треугольник, параллелограмм, трапеция, круг, сегмент круга, эллипс являются примерами выпуклых фигур (рис. 20).

*) Более подробные сведения о выпуклых фигурах (и, в частности, доказательства упоминаемых здесь свойств этих фигур) читатель может найти в книгах: Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, М., 1956; И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, Гостехиздат, М., 1951. Этому же вопросу посвящена статья «Выпуклые фигуры и тела» в V томе Энциклопедии элементарной математики (стр. 181—269).

На рис. 21 приведены примеры невыпуклых фигур. Фигуры, изображенные на рис. 20, являются *ограниченными*. Существуют также *неограниченные* («простирающиеся в

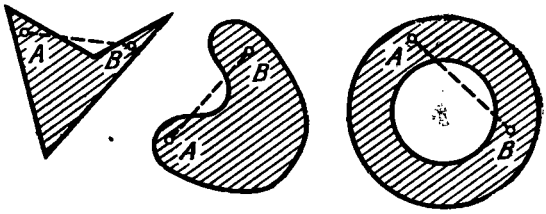


Рис. 21.

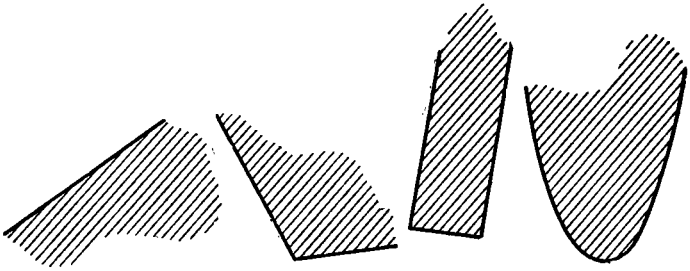


Рис. 22.

бесконечность») выпуклые фигуры: полуплоскость, угол, меньший 180°, и др. (рис. 22).

Точки любой фигуры F разделяются на два класса — *внутренние* точки и *граничные* точки. Внутренними считаются те точки, которые со всех сторон окружены точками фигуры F. Таким образом, если A — внутренняя точка фигуры F, то круг некоторого (хотя бы очень маленького) радиуса с центром в точке A целиком принадлежит фигуре F (рис. 23). К граничной же точке фигуры F как угодно близко подходят как точки, принадлежащие фигуре F, так и точки, ей не принадлежащие (точка B на рис. 23). Все граничные точки, вместе взятые, образуют некоторую линию, называемую *границей* фигуры F. Если выпуклая фигура F ограничена, то ее граница представляет собой замкнутую линию (ср. рис. 19, 20).

Для дальнейшего важно будет заметить, что *всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку выпуклой ограниченной фигуры F, пересекает границу этой фигуры ровно в двух точках* (рис. 24), причем отрезок, соединяющий эти

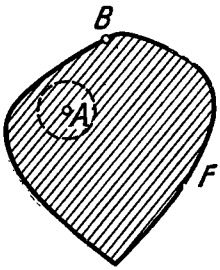


Рис. 23.

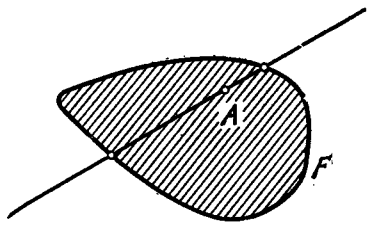


Рис. 24.

две точки, принадлежит фигуре F, а вся остальная часть этой прямой лежит вне фигуры F.

Пусть B — некоторая граничная точка выпуклой фигуры F. Из точки B проведем всевозможные лучи, проходящие через отличные от B точки фигуры F. Эти лучи заполнят либо некоторую полуплоскость (рис. 25, *а*), либо

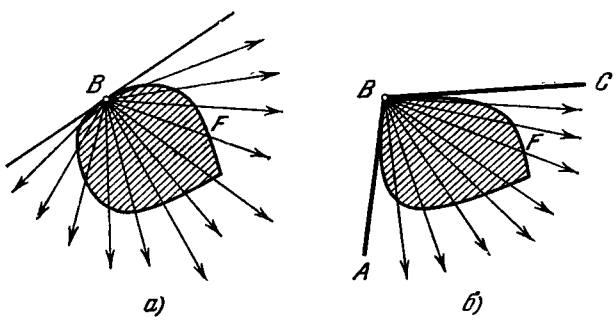


Рис. 25.

некоторый угол, меньший 180° (рис. 25, *б*). В первом случае прямая, ограничивающая полуплоскость, является опорной прямой фигуры F. Любая другая прямая, проходящая через точку B, будет рассекать фигуру на две

части (рис. 26), т. е. не будет опорной. Иначе говоря, через точку B в этом случае проходит единственная опор-

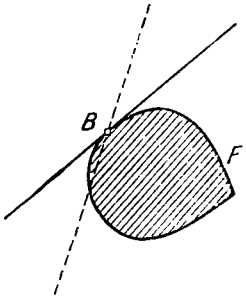


Рис. 26.

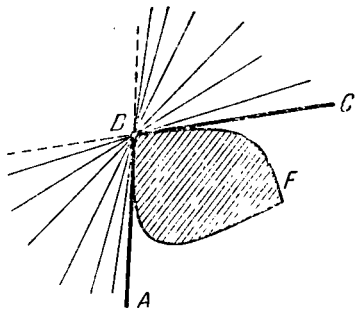


Рис. 27.

пая прямая фигуры F; она называется *касательной* к фигуре F в точке B. Во втором случае (рис. 25, *б*) вся фигура F расположена внутри угла ABC, меньшего 180°, и потому через точку B проходит бесконечно много опорных прямых фигуры F (рис. 27). В частности, опорными являются прямые BA и BC. Лучи BA и BC (проведенные жирной линией на рис. 27) называются *полукасательными* в точке B к фигуре F.

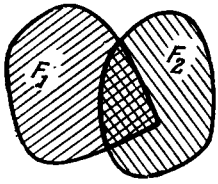


Рис. 28.

Объединяя оба случая вместе, мы видим, что *через каждую граничную точку B выпуклой фигуры F проходит хотя бы одна опорная прямая этой фигуры.* Если через точку B проходит только одна опорная прямая фигуры F (рис. 25, *а*), то B называется *обыкновенной* граничной точкой этой фигуры. Если же через точку B проходит бесконечно много опорных прямых фигуры F, то B называется *угловой* точкой (рис. 25, *б*).

Пусть теперь F_1 и F_2 — две выпуклые фигуры. Тогда *пересечение* этих фигур (т. е. их общая часть) также является выпуклой фигурой (рис. 28). На рис. 29 показаны две выпуклые фигуры: круг F_1 и угол F_2 с вершиной в центре этого круга; пересечением этих двух фигур является

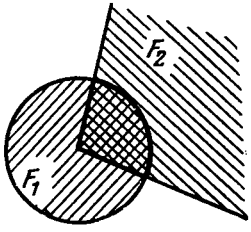


Рис. 29.

круговой сектор. На рис. 30 обе выпуклые фигуры F_1, F_2 неограничены (каждая из них представляет собой полосу); пересечением этих фигур является параллелограмм. Сказанное выше относится не только к двум, но и к большему числу фигур: *пересечение любого (даже бесконечного) числа выпуклых фигур является выпуклой фигурой* ([8]). Рис. 31 показывает, что выпуклый многоугольник представляет собой пересечение конечного числа полуплоскостей. Круг

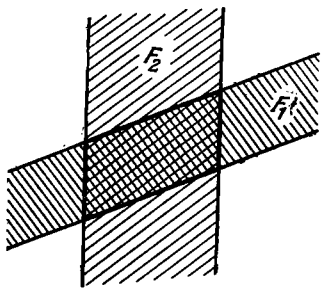


Рис. 30.

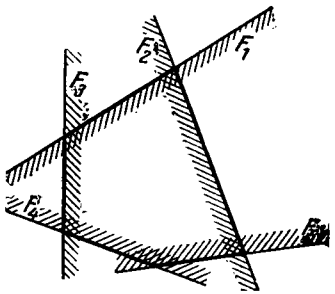


Рис. 31.

(рис. 32) также является пересечением полуплоскостей, но уже бесконечного их числа. И вообще, любую выпуклую фигуру можно представить в виде пересечения бесконечного числа полуплоскостей.

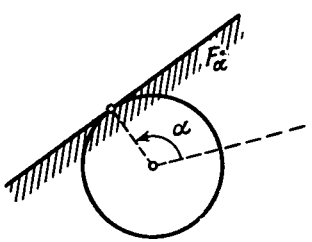


Рис. 32.

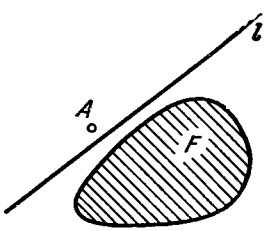


Рис. 33.

Пусть F — некоторая выпуклая фигура и A — не принадлежащая ей точка. Тогда существует прямая, *разделяющая* точку A и фигуру F, т. е. такая прямая, что вся фигура F расположена по одну сторону от нее, а точка A — по другую (рис. 33). Это свойство выпуклых фигур

является характеристическим: *если любую точку, не принадлежащую фигуре F, можно отделить от нее некоторой прямой, то фигура F выпукла.* Иными словами, если фигура F невыпукла, то найдется не принадлежащая ей точка, которую нельзя отделить от фигуры F никакой прямой (рис. 34).

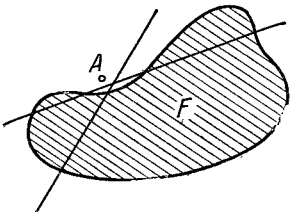


Рис. 34.

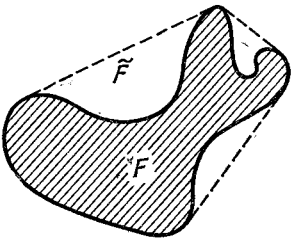


Рис. 35.

В заключение отметим, что для любой фигуры F диаметра d существует наименьшая содержащая ее выпуклая фигура $\tilde{F}$; эта выпуклая фигура (рис. 35), называемая *выпуклой оболочкой фигуры F*, имеет т о т ж е диаметр d. Возможно, что фигура F н е с в я з н а, т. е. состоит из двух или нескольких отдельных кусков — и в этом случае можно определить ее выпуклую оболочку. Например, на рис. 36 показана выпуклая оболочка фигуры F, состоящей из двух отдельных частей F_1, F_2 и точки A.

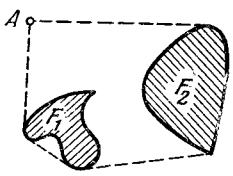


Рис. 36.

Выпуклую оболочку можно себе представлять так: на фигуру F натягивается снаружи замкнутая упругая («резиновая») нить; линия, по которой расположится эта нить, и будет границей выпуклой оболочки $\tilde{F}$. Но это — лишь наглядное описание. Точное определение выпуклой оболочки выглядит следующим образом. Нужно рассмотреть в с е выпуклые фигуры, содержащие фигуру F; тогда пересечение всех этих выпуклых фигур и будет представлять собой выпуклую оболочку фигуры F. В самом деле, согласно сказанному выше, это пересечение будет в ы п у к л о й фигурой. Ясно также, что это пересечение содержит фигуру F и является н а и м е н ь ш е й выпуклой фигурой, обладающей этим свойством.

§ 5. Фигуры постоянной ширины

Пусть F — ограниченная выпуклая фигура и l — некоторая прямая. Проведем к фигуре F две опорные прямые, параллельные l. Расстояние h между этими двумя опорными прямыми называется *шириной* фигуры F в направлении l. Из рассмотрения рис. 37 нетрудно заключить, что высота равностороннего треугольника является его наименьшей шириной, а его сторона — наибольшей шириной. У круга ширина в любом направлении одна и та же: она равна диаметру круга. Может показаться, что

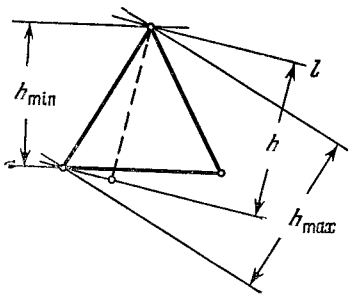


Рис. 37.

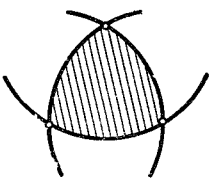


Рис. 38.

круг является единственной выпуклой фигурой, обладающей этим свойством. Однако это не так: существует бесконечное множество *фигур постоянной ширины*, т. е. таких выпуклых фигур, у которых во всех направлениях ширина одинакова. Простейшим примером такой фигуры является *треугольник Релло*, изображенный на рис. 38. Он представляет собой пересечение трех кругов радиуса h, центры которых находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной h.

Вообще, если F — правильный многоугольник с нечетным числом вершин и h — длина наибольшей из его диагоналей, то, соединяя каждые две соседние его вершины дугой окружности радиуса h с центром в противоположной вершине, мы получаем фигуру постоянной ширины h (рис. 39). Это построение проходит и в том случае, если многоугольник диаметра h с нечетным числом сторон не является правильным, но из каждой его вершины исходят две диагонали длины h (рис. 40).

Фигуры постоянной ширины обладают рядом интересных свойств; мы укажем лишь несколько простейших *).

Прежде всего отметим, что диаметр фигуры постоянной ширины равен ее ширине: $d = h$. Через каждую граничную точку фигуры постоянной ширины d проходит хотя бы один д и а м е т р этой фигуры (т. е. хорда, имеющая длину d). Из этого вытекает, что *для любой фигуры F постоянной ширины справедливо равенство* $a(F) = 3$.

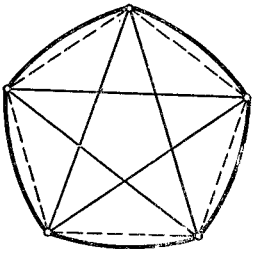


Рис. 39

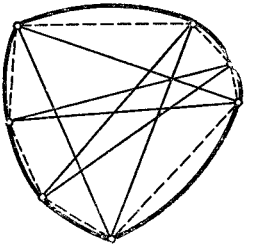


Рис. 40.

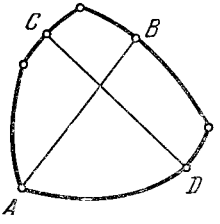


Рис. 41.

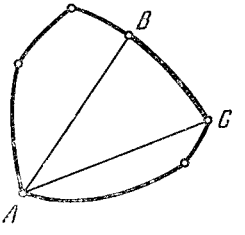


Рис. 42.

Более того, г р а н и ц у фигуры постоянной ширины d нельзя разбить на две части меньшего диаметра. Это доказывается совершенно так же, как для окружности (стр. 6 и примечание ([3])).

Всякие два диаметра фигуры постоянной ширины всегда пересекаются (либо внутри фигуры, либо на ее границе, рис. 41, 42). При этом, если два диаметра AB и AC имеют общую г р а н и ч н у ю точку A, то дуга BC радиуса d с

*) Доказательство этих свойств можно найти в указанной на стр. 13 книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского.

центром в точке A целиком лежит на границе фигуры (рис. 42).

Наконец, отметим, что если F — фигура постоянной ширины и AB — ее диаметр, то прямые l_1 и l_2, проходящие через точки A и B и перпендикулярные к отрезку AB, являются опорными прямыми фигуры F (рис. 43).

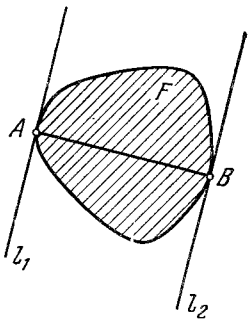


Рис. 43.

§ 6. Вложение в фигуру постоянной ширины

Вернемся к рис. 39 и обозначим правильный многоугольник, изображенный на нем, через M, а содержащую его фигуру постоянной ширины — через F. Таким образом, многоугольник M, имеющий диаметр d, содержится в фигуре F постоянной ширины d.

Для правильных многоугольников с четным числом сторон аналогичное построение не проходит. Однако и в этом случае остается верным, что правильный многоугольник, имеющий диаметр d, можно вложить в фигуру постоянной ширины d (рис. 44). Интересно отметить, что для правильного многоугольника с нечетным числом вершин существует единственная содержащая его фигура постоянной ширины, имеющая тот же диаметр. Для правильного же многоугольника с четным числом сторон содержащая его фигура постоянной ширины (имеющая тот же диаметр) не единственна. Например, квадрат диаметра d содержится не только в фигуре, изображенной на рис. 44, но и в описанном круге, который также, очевидно, является фигурой постоянной ширины d.

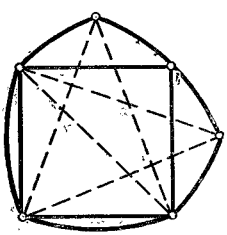


Рис. 44.

Сказанное выше о возможности вложения правильных многоугольников в фигуры постоянной ширины имеет далеко идущее обобщение. Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. *Всякая фигура диаметра d может быть вложена в некоторую фигуру постоянной ширины d.*

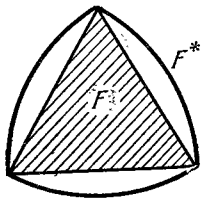


Рис. 45.

Для доказательства этой теоремы мы предварительно введем одно понятие и докажем три леммы.

Пусть F — произвольная плоская фигура диаметра, не превосходящего d. Ясно, что можно найти круг радиуса d, целиком содержащий фигуру F (например, если A — произвольная точка фигуры F, то круг радиуса d с центром A целиком содержит фигуру F). Пересечение в с е х кругов радиуса d, содержащих фигуру F, мы обозначим через F^* и назовем *d-расширением* (или просто *расширением*) фигуры F. Например, если F есть равносторонний треугольник со стороной d, то F^*— треугольник Релло (рис. 45).

Из определения ясно, что расширение выпуклой фигуры F (диаметра, не превосходящего d) само является выпуклой фигурой.

Л е м м а 2. *Пусть F — фигура диаметра d. Тогда ее расширение F* также имеет диаметр d.*

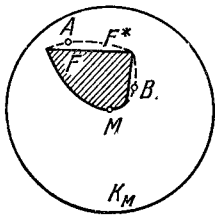


Рис. 46.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B — произвольные точки фигуры F^*. Возьмем произвольную точку M фигуры F и рассмотрим круг K_M радиуса d с центром в точке M (рис. 46). Этот круг содержит целиком фигуру F и, следовательно, является одним из тех кругов, которые дают в пересечении фигуру F^*. Поэтому фигура F^* также содержится в круге K_M. В частности, точка A принадлежит кругу K_M и потому

$$AM \leqslant d.$$

Итак, $AM \leqslant d$ для любой точки M фигуры F. Следовательно, круг K_A радиуса d с центром в точке A содержит всю фигуру F (рис. 47) и потому является одним из тех кругов, которые дают в пересечении фигуру F^*. Из этого вытекает, что фигура F^* содержится целиком в

круге K_A. В частности, точка B содержится в круге K_A и потому $AB \leqslant d$.

Таким образом, расстояние между любыми двумя точками A, B фигуры F^* не превосходит d, т. е. диаметр фигуры F^* не больше чем d. Но он и не меньше чем d, ибо фигура F^* целиком содержит фигуру F диаметра d.

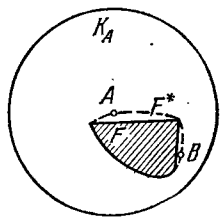


Рис. 47.

Л е м м а 3. *Пусть F — фигура диаметра d и F^* — ее расширение. Пусть, далее, M — произвольная граничная точка фигуры F^* и l — проходящая через M опорная прямая фигуры F^*. Тогда круг K_l радиуса d, касающийся прямой l в точке M и расположенный по ту же сторону от l, что и фигура F, содержит целиком фигуру F^** (рис. 48).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что круг K_l не содержит фигуры F^*, т. е. найдется точка A, принадлежащая фигуре F^* и лежащая вне круга K_l. Проведем через точки M и A окружность S радиуса d, центр которой расположен по ту же сторону от l, что и фигура F^* (рис. 49). Так как окружность S отлична от окружности круга

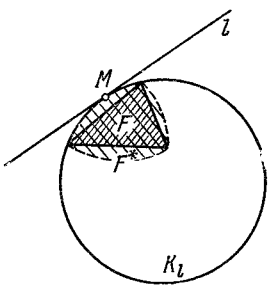


Рис. 48.

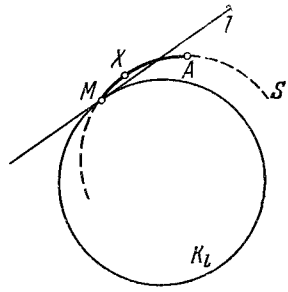


Рис. 49.

K_l, то она не касается прямой l в точке M, т. е. пересекает прямую l. Следовательно, дуга AM окружности S (меньшая полуокружности) пересекает прямую l, т. е. на дуге AM найдется точка X, лежащая по другую сторону от l, чем фигура F^*. Пусть теперь K — произвольный круг радиуса d, содержащий фигуру F. Тогда

круг K содержит и фигуру F^* (ибо K входит в число кругов, дающих в пересечении фигуру F^*), и потому точки A и M принадлежат кругу K. Отсюда следует, что круг K содержит целиком и дугу AM; в частности, точка X принадлежит кругу K. Итак, любой круг радиуса d, содержащий фигуру F, содержит также точку X, и потому X принадлежит фигуре F^*, вопреки тому, что l — опорная прямая фигуры F^*. Полученное противоречие доказывает лемму.

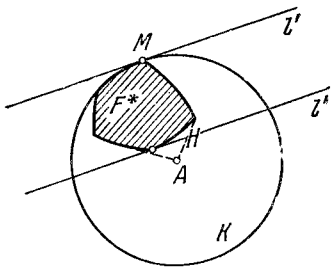


Рис. 50.

Л е м м а 4. *Пусть F — выпуклая фигура диаметра d. Если F не является фигурой постоянной ширины, то существует выпуклая фигура H диаметра d, содержащая фигуру F и отличная от нее* (*а следовательно, имеющая большую площадь*) ([9]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим расширение F^* фигуры F. Если F не совпадает с F^*, то фигура

$$H = F^*$$

является искомой: она содержит фигуру F, имеет диаметр d и, очевидно, имеет бóльшую площадь, чем фигура F.

Пусть теперь исходная фигура F совпадает с F^*. Так как F не является фигурой постоянной ширины d, то найдутся две параллельные опорные прямые l' и l'' фигуры F, расстояние между которыми меньше d. Обозначим через M общую точку прямой l' и фигуры F, а через K — круг радиуса d, касающийся прямой l' в точке M и расположенный по ту же сторону от прямой l', что и фигура F (рис. 50).

Центр круга K обозначим через A. Точка A не принадлежит фигуре F (ибо $AM = d$, а расстояние между прямыми l' и l'' меньше d). Согласно лемме 3, круг K целиком содержит фигуру $F = F^*$. Следовательно, для любой точки M фигуры F отрезок AM не превосходит d. Иначе говоря, фигура F', состоящая из фигуры F и точки A, имеет диаметр d. Выпуклая оболочка H фигуры F' (рис. 50) также имеет диаметр d. Так как площадь фигуры H,

очевидно, больше площади фигуры F (напомним, что точка A не принадлежит фигуре F), то фигура H является искомой.

Доказательство теоремы 2. Пусть F — фигура диаметра d. Если ее расширение F^* является фигурой постоянной ширины, то теорема справедлива.

Пусть теперь F^* не является фигурой постоянной ширины. Будем рассматривать всевозможные фигуры диаметра d, содержащие фигуру F^*. Так как каждая фигура диаметра d содержится целиком в некотором круге радиуса d, то площадь любой такой фигуры не превосходит πd^2. Обозначим через k наибольшее из таких целых чисел, что существует фигура диаметра d, содержащая F^* и имеющая площадь, большую или равную k. Выберем одну из таких фигур и обозначим ее через H_0. Ясно, что фигура H_0 обладает следующими свойствами: она имеет диаметр d и всякая содержащая ее фигура диаметра d превосходит ее по площади не больше чем на 1 (иначе вместо k можно было бы взять $k+1$).

Обозначим теперь через k_1 наибольшее из таких целых чисел, что существует выпуклая фигура диаметра d, содержащая H_0 и имеющая площадь, большую или равную $k+\frac{k_1}{10}$. Одну из таких фигур выберем и обозначим через H_1. Итак, H_1 содержит фигуру H_0, имеет диаметр d и всякая выпуклая фигура диаметра d, содержащая H_1, превосходит ее по площади не больше чем на 1/10.

Таким же точно способом мы построим выпуклую фигуру H_2 диаметра d, содержащую H_1 и обладающую тем свойством, что всякая выпуклая фигура диаметра d, содержащая H_2, превосходит ее по площади не более чем на 1/100. Затем мы проведем такое же построение для числа 1/1000 и т. д.

При проведении этого построения могут представиться две возможности: либо на некотором шаге этого построения получится фигура H_n, уже являющаяся фигурой постоянной ширины d (и построение на этом закончится), либо же ни одна из фигур H_n не будет фигурой постоянной ширины, и мы получим бесконечную последовательность выпуклых фигур H_0, H_1,..., H_n,..., каждая из которых содержится в последующей. В первом случае, когда построение заканчивается на фигуре H_n, имеющей постоянную ширину d, эта фигура H_n, очевидно, является

искомой. Во втором случае обозначим через H объединение всех фигур H_0, H_1,..., H_n,... Иначе говоря, H состоит из всех тех точек, каждая из которых принадлежит какой-нибудь фигуре H_n ([10]).

Фигура H выпукла. В самом деле, пусть A и B — две точки этой фигуры. Тогда A принадлежит некоторой фигуре H_n, а B — некоторой фигуре H_m. Пусть, для определенности, $n \geqslant m$. Тогда фигура H_m целиком содержится в H_n. Следовательно, обе точки A, B принадлежат фигуре H_n. Вместе с ними фигуре H_n принадлежит и весь отрезок AB. Но тогда отрезок AB целиком принадлежит фигуре H, т. е. фигура H выпукла.

Легко видеть, далее, что фигура H имеет диаметр d. Действительно, пусть A и B — произвольные две точки фигуры H. Тогда, как и выше, обе эти точки принадлежат некоторой фигуре H_n. Так как диаметр фигуры H_n равен d, то $AB \leqslant d$.

Докажем, наконец, что H — фигура постоянной ширины d. Допустим противное. Тогда, по лемме 4, существует выпуклая фигура H' диаметра d, содержащая фигуру H и имеющая бо́льшую площадь. Пусть n — такое натуральное число, что разность площадей фигур H' и H больше чем $1/10^n$. Тогда разность площадей фигур H' и H_n, подавно, больше чем $1/10^n$. Но это противоречит выбору фигуры H_n. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

§ 7. Для каких фигур $a(F) = 3$?

Как мы уже отмечали, в некоторых случаях фигуру диаметра d можно лишь однозначно дополнить до фигуры постоянной ширины d (как, например, в случае правильного многоугольника с нечетным числом сторон). В других случаях такое дополнение неоднозначно. В качестве еще одного примера фигуры, допускающей неоднозначное дополнение до фигуры постоянной ширины, укажем круг, от которого отрезан сегмент с дугой, меньшей полуокружности. Диаметр d этой фигуры F равен, очевидно, диаметру исходного круга K. Поэтому круг K является одной из фигур постоянной ширины d, содержащей фигуру F. Другое дополнение до фигуры постоянной ширины показано на рис. 51 (на котором $AN = NB = AC = BD = d$, а $\smile AB$, $\smile DN$ и $\smile CN$—дуги радиуса d).

Теперь мы вернемся к сформулированной в начале § 4 задаче о нахождении всех фигур F, для которых $a(F) = 3$. В этом параграфе мы дадим решение этой задачи, полученное в 1969 г. В. Г. Болтянским.

Т е о р е м а 3. *Для плоской фигуры F диаметра d равенство $a(F) = 3$ имеет место в том и только в том случае, если фигура F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.*

Так, например, для всякого правильного многоугольника F с нечетным числом сторон имеет место равенство $a(F) = 3$, а для всякого правильного многоугольника с четным числом сторон имеет место равенство $a(F) = 2$ (последнее, впрочем, ясно и непосредственно; см. рис. 52). Точно так же круг с отрезанным сегментом (ср. рис. 51) удовлетворяет соотношению $a(F) = 2$ (что также ясно непосредственно; см. рис. 53).

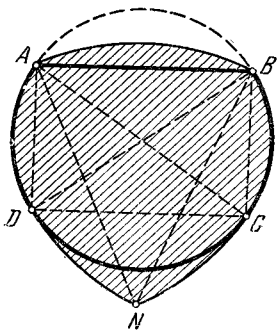


Рис. 51.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 3, мы докажем ряд вспомогательных предложений.

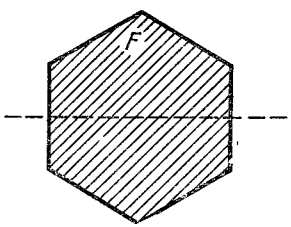


Рис. 52.

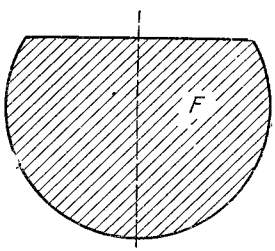


Рис. 53.

Л е м м а 5. *Пусть F — плоская выпуклая фигура диаметра d. Если существует такой круг радиуса d, который содержит фигуру F и центр которого не принадлежит фигуре F^*, то фигура F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — круг радиуса d, содержащий фигуру F, центр A которого не принадле-

жит фигуре F^*. Так как F^* есть пересечение всех кругов радиуса d, содержащих фигуру F, и так как F^* не содержит точки A, то найдется круг K' радиуса d, содержащий фигуру F и не содержащий точки A. Центр круга K' обозначим через B (рис. 54). Ясно, что длина отрезка AB б о л ь ш е d (ибо круг K' не содержит точки A).

Присоединяя теперь к фигуре F точку A, мы получим несвязную фигуру F', диаметр которой, как легко видеть, равен d. (Действительно, расстояние от «новой» точки A до любой точки фигуры F не превосходит d, так как F содержится в круге K.) Точно так же, присоединяя к фигуре F точку B, мы получим несвязную фигуру F'', диаметр которой равен d. Выберем теперь какую-нибудь фигуру Φ' постоянной ширины d, содержащую фигуру F', и какую-нибудь фигуру Φ'' постоянной ширины d, содержащую фигуру F'' (это можно сделать по теореме 2). Ясно, что фигуры Φ' и Φ'' не могут совпадать (ибо $AB > d$, и потому никакая фигура постоянной ширины d не может содержать обе точки A, B). В то же время каждая из фигур Φ', Φ'' содержит фигуру F. Таким образом, F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.

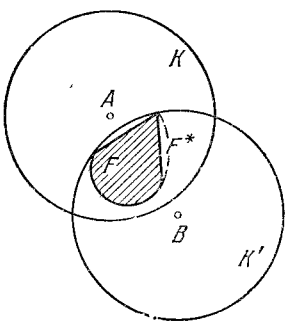


Рис. 54.

Л е м м а 6. *Пусть F — фигура диаметра d и Φ — содержащая ее фигура постоянной ширины d. Тогда фигура F^* целиком содержится в Φ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — произвольная точка, не принадлежащая фигуре Φ. Проведем прямую l, отделяющую точку A от фигуры Φ. Обозначим через l' и l'' опорные прямые к фигуре Φ, параллельные l, а через B и C — общие точки этих прямых с фигурой Φ (рис. 55). Тогда отрезок BC перпендикулярен к прямым l', l'' и имеет длину d. Обозначим через K_C круг радиуса d с центром в точке C. Этот круг целиком содержит фигуру Φ, а значит, и фигуру F. Поэтому K_C является одним из кругов, дающих в пересечении фигуру F^*. Следовательно, F^* содержится целиком в круге K_C. Так как точка A не принадлежит кругу K_C, то она не принадлежит и фигуре

F^*. Итак, если точка A не принадлежит фигуре Ф, то она не принадлежит и фигуре F^*. Это и означает, что F^* целиком содержится в фигуре Ф.

Л е м м а 7. *Фигура F диаметра d в том и только в том случае однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d, если ее расширение F^* является фигурой постоянной ширины d.*

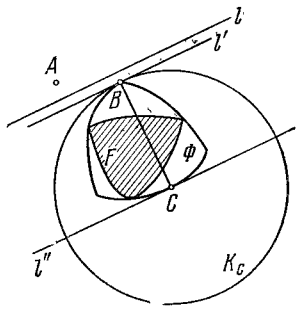


Рис. 55.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что F^* есть фигура постоянной ширины d, и пусть H — произвольная фигура постоянной ширины d, содержащая F. Тогда, согласно лемме 6, фигура H должна содержать целиком и F^*. Так как F^* уже есть фигура постоянной ширины d, то отсюда следует, что H совпадает с F^*. Таким образом, F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.

Пусть теперь F^* не есть фигура постоянной ширины d. Тогда можно провести две параллельные опорные прямые l, l' фигуры F^*, расстояние между которыми меньше d (рис. 56). Пусть M — точка, в которой прямая l встречает фигуру F^*. Обозначим через K_l круг радиуса d, касающийся прямой l в точке M и расположенный по ту же сторону прямой l, что и фигура F^*. Согласно лемме 3, круг K_l содержит фигуру F^*. Ясно при этом, что центр A круга K_l не принадлежит фигуре F^* (ибо фигура F^* лежит в полосе между прямыми l, l', а центр A лежит вне этой полосы). Но тогда, согласно лемме 5, фигура F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.

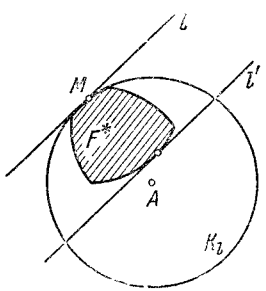


Рис. 56.

Л е м м а 8. *Если при выполнении условий леммы 3 точка M не принадлежит фигуре F, то найдутся такие две точки A, B фигуры F, лежащие на окружности круга K_l, что дуга AB этой окружности (меньшая полуокружности) содержит точку M* (рис. 57).

Доказательство. Обозначим через N точку круга K_l, диаметрально противоположную точке M. Для простоты языка условимся считать прямую l «горизонтальной», а круг K_l — лежащим «под» прямой l (рис. 57).

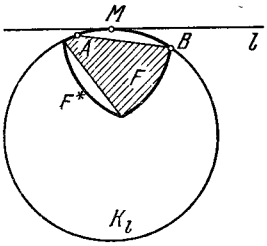


Рис. 57.

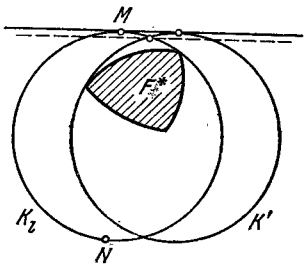


Рис. 58.

Если бы левая полуокружность, определяемая точками M и N, не содержала ни одной точки фигуры F, то круг K_l можно было бы сдвинуть вправо, и сдвинутый круг K' все еще содержал бы фигуру F (а значит, и фигуру F^*). Но тогда фигура F^* содержалась бы в пересечении кругов K_l и K', и прямая l не могла бы быть опорной для F^* (рис. 58). Это рассуждение показывает, что левая полуокружность содержит (хотя бы одну) точку A фигуры F (рис. 57). Точно так же правая полуокружность содержит точку B фигуры F. Далее так как точки A, B, M принадлежат фигуре F^*, то $AM \leqslant d$, $BM \leqslant d$, и потому та из двух дуг, определяемых на окружности круга K_l точками A и B, которая содержит точку M, будет меньше полуокружности (она даже не превосходит шестой части окружности, ибо $AB \leqslant d$).

Лемма 9. *Если F — фигура, диаметр которой меньше d, то ее d-расширение F^* также имеет диаметр, меньший d.*

Доказательство. Обозначим диаметр фигуры F через d', так что $d' < d$. Далее, d'-расширение фигуры F обозначим через F', а d-расширение фигуры F будем по-прежнему обозначать через F^*. Пусть точка M плоскости не принадлежит фигуре F', т. е. существует круг K' радиуса d', содержащий фигуру F, но не содержащий точки M. Обозначим через A ближайшую к M точку круга K'

(рис. 59) и построим круг K радиуса d, содержащий круг K' и внутренним образом касающийся его в точке A. Ясно, что круг K также не содержит точку M (и содержит фигуру F), откуда следует, что M не принадлежит фигуре F^*. Итак, если точка M не принадлежит фигуре F', то она не принадлежит и фигуре F^*, так что фигура F^* целиком содержится в F'. Но d'-расширение F' фигуры F диаметра d' имеет, согласно лемме 2, диаметр d'. Следовательно, диаметр фигуры F^* не превосходит d', т. е. меньше d.

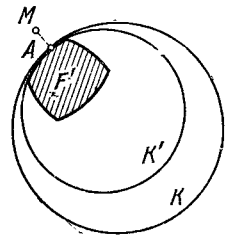


Рис. 59.

Доказательство теоремы 3. Пусть F — фигура диаметра d, которая *неоднозначно* дополняется до фигуры постоянной ширины d. Докажем, что $a(F) = 2$. В самом деле, пусть Φ_1 и Φ_2 — две различные фигуры постоянной ширины d, содержащие F. Ясно, что найдется граничная точка A фигуры Φ_1, лежащая внутри фигуры Φ_2. Через точку A можно провести опорную прямую l_1 фигуры Φ_1. Пусть l_2— вторая опорная прямая фигуры Φ_1, параллельная l_1, а B — точка встречи этой опорной прямой с фигурой Φ_1 (рис. 60). Тогда прямая AB перпендикулярна к прямым l_1, l_2. Мы докажем, что прямая AB рассекает фигуру F на две части, каждая из которых имеет диаметр, меньший d.

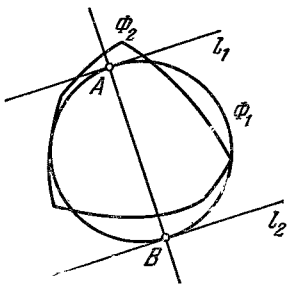


Рис. 60.

Допустим, напротив, что какая-нибудь из этих частей имеет диаметр d, т. е. по одну сторону прямой AB найдутся точки C, D фигуры F, находящиеся друг от друга на расстоянии d. Тогда отрезки AB и CD являются диаметрами фигуры Φ_1 постоянной ширины (напомним, что фигура F содержится в Φ_1), и потому отрезки AB и CD должны либо пересекаться в точке, являющейся внутренней для обоих отрезков AB, CD, либо должны иметь общую концевую точку. Первое невозможно, поскольку точки C, D расположены по одну сторону прямой AB. Следовательно, отрезки AB и CD должны иметь общую кон-

цевую точку. Но точка B лежит в н е фигуры Φ_2 (ибо A лежит в н у т р и этой фигуры и $AB=d$), а значит и вне фигуры F, в то время как точки C, D принадлежат фигуре F. Следовательно, точка B не может быть общим концом отрезков AB и CD. Наконец, точка A, лежащая в н у т р и фигуры Φ_2, отстоит от любой точки фигуры Φ_2 м е н е е чем на d и потому не может совпадать с концом отрезка CD, расположенного в Φ_2 и имеющего длину d.

Полученное противоречие показывает, что каждая из частей, на которые прямая AB рассекает фигуру F, имеет диаметр, меньший d, и потому $a(F) = 2$.

Пусть теперь фигура F диаметра d *однозначно* дополняется до фигуры постоянной ширины d. Покажем, что в этом случае $a(F) = 3$. Допустим, напротив, что $a(F) = 2$, т. е. F можно представить в виде объединения двух фигур Q_1, Q_2, каждая из которых имеет диаметр, меньший d. Так как F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d, то F^* есть фигура постоянной ширины d (лемма 7). Обозначим d-расширение фигур Q_1, Q_2 через $Q_1{}^*$, $Q_2{}^*$. Согласно лемме 9, каждая из фигур $Q_1{}^*$, $Q_2{}^*$ имеет диаметр, меньший d.

Границу фигуры F^* обозначим через Γ. Пусть M — произвольная точка кривой Γ. Если точка M принадлежит фигуре F, то, очевидно, M содержится в объединении фигур Q_1 и Q_2 и подавно содержится в объединении фигур $Q_1{}^*$ и $Q_2{}^*$. Пусть теперь точка M не принадлежит множеству F. Проведем опорную прямую l фигуры F^*, проходящую через точку M, и построим круг K_l радиуса d, касающийся прямой l в точке M и расположенный по ту же сторону от l, что и фигура F^* (рис. 61). Центр N этого круга принадлежит фигуре F^* (ибо $MN \perp l$ и $MN = d$, т. е. MN есть диаметр фигуры F^* постоянной ширины d). Так как точка M не принадлежит фигуре F, то, согласно лемме 8, найдутся такие две точки A, B фигуры F, лежащие на окружности круга K_l, что дуга AB этой окружности (меньшая полуокружности) содержит точку M. Таким образом, $AN = BN = d$, т. е. AN и BN являются диаметрами фигуры F^* постоянной ширины d. Из этого следует, что N есть у г л о в а я точка линии Γ и вся дуга AB принадлежит кривой Γ, так что M есть обычная (неугловая) точка кривой Γ. Но тогда ясно, что точка N д о л ж н а принадлежать фигуре F (ибо в противном случае, поменяв ролями M и N, мы с помощью аналогичного

рассуждения получили бы, что M — угловая, а N — неугловая точка линии Г).

Так как точка N принадлежит фигуре F, то она содержится хотя бы в одной из фигур Q_1, Q_2. Пусть, для определенности, точка N принадлежит фигуре Q_1. Так как $AN = BN = d$, а множество Q_1 имеет диаметр, м е н ь ш и й d, то точки A, B не принадлежат множеству Q_1. А так как обе эти точки принадлежат фигуре F, то обе точки A, B содержатся в фигуре Q_2. Дуга AB радиуса d, содержащая точку M, очевидно, принадлежит любому кругу радиуса d, содержащему точки A и B. В частности, эта дуга принадлежит любому кругу радиуса d, содержащему фигуру Q_2. Отсюда вытекает, что точка M принадлежит фигуре $Q_2{}^*$. Аналогично, если N принадлежит фигуре Q_2, то M принадлежит фигуре $Q_1{}^*$. Таким образом, в любом случае точка M принадлежит объединению фигур $Q_1{}^*$ и $Q_2{}^*$.

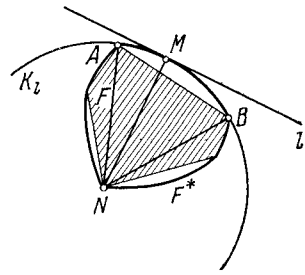


Рис. 61.

Итак, любая точка M линии Г (как принадлежащая, так и не принадлежащая фигуре F) содержится в объединении фигур $Q_1{}^*$ и $Q_2{}^*$, т. е. линия Г может быть разбита на две части, каждая из которых имеет диаметр, меньший d. Но это невозможно, так как Г — граница фигуры постоянной ширины (ср. стр. 20). Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы 3 ([11]).

Заметим в заключение, что доказанная теорема может быть, согласно лемме 7, сформулирована так:

Пусть F — фигура диаметра d; равенство $a(F) = 3$ имеет место в том и только в том случае, если F^* является фигурой постоянной ширины d.

Отметим также следующий любопытный факт:

Для любой плоской фигуры F диаметра d имеет место равенство $a(F) = a(F^*)$.

В самом деле, если $a(F) = 2$, то существуют две различные фигуры Φ_1, Φ_2 постоянной ширины d, содержащие F. Тогда согласно лемме 6 фигура F^* содержится в каждой из фигур Φ_1, Φ_2, т. е. F^* также неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d. Следовательно, $a(F^*) = 2$, т. е. $a(F^*) = a(F)$. Если же $a(F) = 3$, то подавно $a(F^*) = 3$.

ГЛАВА II

РАЗБИЕНИЕ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

§ 8. Наглядный пример

Если выбран отрезок LM, принимаемый за единицу длины, то *длина* произвольного отрезка AB определяется как число, равное отношению $AB : LM$. Длина отрезка AB зависит только от его величины и совсем не зависит от направления и расположения этого отрезка. Однако в некоторых задачах возникает необходимость в другом определении длины отрезка, при котором длина отрезка зависит как от его величины, так и от его направления. Для определения длины в таком новом смысле необходимо задать единицу длины для каждого направления в отдельности. Весьма интересное определение такого рода было предложено в конце XIX в. известным немецким математиком Г. Минковским. Это определение мы и рассмотрим в этом параграфе. Для пояснения характера этого определения разберем сначала наглядный пример.

Представим себе, что мы находимся в огромном городе M весьма правильной планировки, на карте которого половина улиц идет строго вертикально через всю территорию города, а половина строго горизонтально (рис. 62). Некто желает пройти (или проехать в автомобиле) из точки A в точку B в этом городе. Каким будет в его представлении «расстояние» между этими точками?

Имея карту города, можно, конечно, провести по линейке отрезок AB и измерить его длину. Однако такое расстояние было бы в этом городе лишь воображаемым, так как

движение по отрезку AB требовало бы умения проходить сквозь стены домов *). Реальным расстоянием между точками A и B следует считать длину показанной на рис. 63 ломаной ACB. Кроме ACB существует целый ряд других

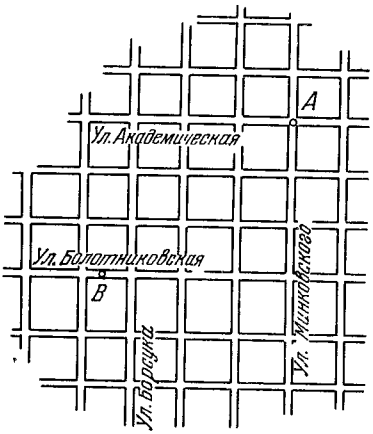


Рис. 62.

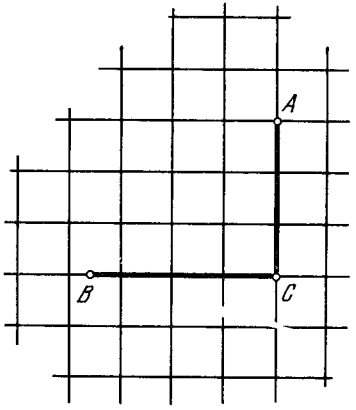


Рис. 63.

реальных путей, идущих из A в B и имеющих ту же длину (рис. 64), но более коротких реальных путей не существует.

Если ввести на карте этого города систему координат, оси которой идут вдоль двух перпендикулярных улиц, то, в силу сказанного, ясно, что реальное расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ этого города M (т. е. «длина» отрезка AB в геометрии этого города) равно

$$\text{дл.}_M AB = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \qquad (*)$$

(рис. 65). Умея находить «расстояние» между двумя точками в городе M, можно поставить вопрос о нахождении «единичного круга» в этом городе, т. е. множества всех тех точек, которые находятся на «расстоянии», не превосходящем единицы, от начала координат O. Так как точка O

*) Мы предполагаем, что наш Некто не обладает способностями главного героя фильма «Человек проходит сквозь стену».

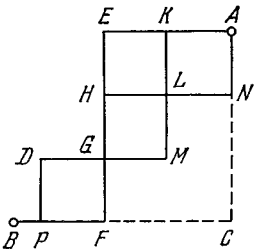
имеет координаты (0, 0), то, согласно формуле (*), расстояние от точки O до точки $C(x, y)$ равно

$$\text{дл.}_M OC = |x| + |y|.$$

Следовательно, «единичный круг» в этом городе определяется неравенством

$$|x| + |y| \leqslant 1.$$

Теперь ясно, что на карте этого города указанный единич-



дл. ACB = дл. $AEFB$ = дл. $ANHFB$ = дл. $AKLHGDPB$ = ...

Рис. 64.

ный круг изображается к в а д р а т о м (рис. 66). Пользуясь этим единичным кругом, можно теперь находить

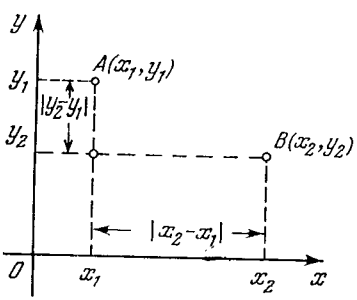


Рис. 65.

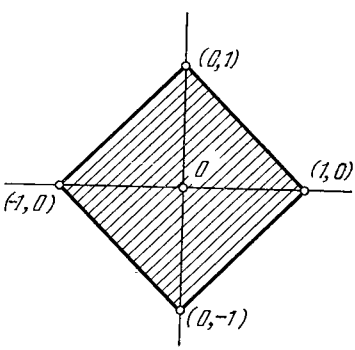


Рис. 66.

расстояния между любыми двумя точками так, как было указано в начале этого параграфа. Именно, если даны две произвольные точки A и B, то мы найдем на границе «еди-

ничного круга» такую точку C, что $OC \parallel AB$, и тогда длина отрезка AB будет равна отношению $AB : OC$.

Эта идея — считать единичным кругом некоторую выпуклую центрально-симметричную фигуру — и лежит в основе геометрии Минковского на плоскости *).

§ 9. Плоскость Минковского

Пусть задана ограниченная плоская выпуклая фигура G, симметричная относительно некоторой точки O (рис. 67). Через Г обозначим кривую, ограничивающую фигуру G. Будем считать, что единицей длины, соответствующей направлению l, является отрезок OL луча, параллельного направлению l, от точки O до точки L пересечения этого луча с линией Г. Длина отрезка AB относительно новой системы масштабов определяется теперь как отношение $AB : OL$, где OL — единица длины, параллельная направлению l, определяемому вектором $\overrightarrow{AB}$. (В случае, когда точка A совпадает с точкой B, естественно считать, что длина отрезка AB равна нулю.) В дальнейшем длину отрезка AB относительно системы масштабов, порождаемой фигурой G, мы будем обозначать символом дл.$_G$ AB. Очевидно, что дл.$_G$ $OM = 1$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на кривой Г. Если точка M лежит внутри фигуры G, то дл.$_G$ $OM < 1$, а если, наоборот, точка M лежит вне фигуры G, то дл.$_G$ $OM > 1$.

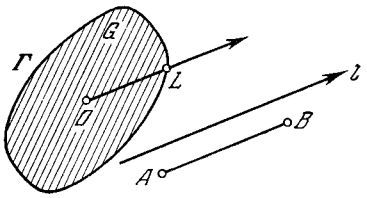


Рис. 67.

Заметим, что если фигура G совпадает с кругом, то мы придем к обычному определению длины, при котором длина отрезка зависит только от его величины, но не от направления, а если G является квадратом (рис. 66), то мы приходим к определению длины, рассмотренному в предыдущем параграфе.

*) О других способах измерения расстояний (и о том, что такое «расстояние» в самом общем математическом понимании) читатель может прочитать в книге Ю. А. Шрейдера, Что такое расстояние? (Серия «Популярные лекции по математике», вып. 38, Физматгиз, 1963).

Укажем теперь основные свойства нового определения длины. Как мы уже знаем,

$$\text{дл.}_G AB \geqslant 0,$$

причем знак равенства в последнем соотношении имеет место в том и только в том случае, когда точки A и B совпадают. Кроме того, из центральной симметричности фигуры G вытекает равенство

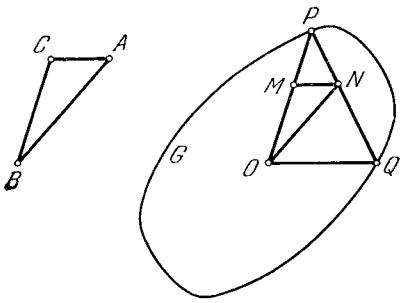


Рис. 68.

$$\text{дл.}_G AB = \text{дл.}_G BA.$$

Наконец, если AB и CD — параллельные отрезки, причем $AB : CD = k$, то

$$\text{дл.}_G AB = k \cdot \text{дл.}_G CD.$$

До сих пор мы нигде не пользовались выпуклостью фигуры G. Оказывается, что выпуклость фигуры G обеспечивает справедливость следующего очень важного свойства новой длины:

Неравенство треугольника. *Во всяком треугольнике ABC длина одной из сторон (относительно масштабов, определяемых фигурой G) не превосходит суммы длин двух других сторон.*

Доказательство. Положим

$$\text{дл.}_G BC = a, \quad \text{дл.}_G AC = b, \quad \text{дл.}_G AB = c.$$

Далее, проведем в фигуре G «радиусы» OP и OQ, имеющие то же направление, что и векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ (рис. 68). Затем возьмем на отрезке OP такую точку M, что $OM : MP = a : b$, и проведем в треугольнике OPQ отрезок $MN \parallel OQ$. Мы имеем (учитывая подобие треугольников OPQ и MPN)

$$\text{дл.}_G OM = OM : OP = \frac{a}{a+b},$$

$$\text{дл.}_G MN = MN : OQ = MP : OP = \frac{b}{a+b}.$$

Следовательно,

$$BC : OM = \text{дл.}_G BC : \text{дл.}_G OM = a : \frac{a}{a+b} = a + b,$$

$$CA : MN = \text{дл.}_G CA : \text{дл.}_G MN = b : \frac{b}{a+b} = a + b.$$

Таким образом, $BC : OM = CA : MN$; кроме того, $\angle BCA = \angle OMN$. Отсюда вытекает, что треугольники BCA и OMN подобны, и потому $AB \parallel ON$ и $AB : ON = a + b$, т. е. $\text{дл.}_G AB : \text{дл.}_G ON = a + b$. Итак,

$$\text{дл.}_G ON = \frac{\text{дл.}_G AB}{a+b} = \frac{c}{a+b}.$$

Но точки P и Q принадлежат фигуре G. В силу в ы п у к л о с т и этой фигуры, весь отрезок PQ принадлежит ей, и, в частности, точка N принадлежит фигуре G. Отсюда следует, что $\text{дл.}_G ON \leqslant 1$, т. е. $\frac{c}{a+b} \leqslant 1$, или, наконец, $c \leqslant a + b$. Это и означает, что

$$\text{дл.}_G AB \leqslant \text{дл.}_G BC + \text{дл.}_G AC.$$

Плоскость, в которой масштабы длин задаются некоторой выпуклой центрально-симметричной фигурой G, называется *плоскостью Минковского*. Сама фигура G называется *единичным кругом* плоскости Минковского.

Пусть r — некоторое число и C — произвольная точка плоскости Минковского. Множество всех точек A, удаленных от точки C на расстояние, не превосходящее r, т. е. удовлетворяющих условию $\text{дл.}_G CA \leqslant r$, называется в геометрии Минковского *кругом радиуса* r. Заметим, что если две точки A, B принадлежат одному кругу радиуса r, то расстояние между ними не превосходит $2r$; в самом деле, если C — центр этого круга, то, в силу неравенства треугольника,

$$\text{дл.}_G AB \leqslant \text{дл.}_G AC + \text{дл.}_G BC \leqslant r + r = 2r.$$

Для того чтобы наглядно себе представить, как выглядит круг на плоскости Минковского, мы напомним определение г о м о т е т и и. Пусть F — некоторая плоская фигура. Выберем на плоскости произвольную точку O и возьмем, кроме того, положительное число k. Для любой точки A фигуры F мы найдем на луче OA такую точку A',

что $OA' : OA = k$ (рис. 69). Множество всех получаемых таким образом точек A' представляет собой новую фигуру F'. Переход от фигуры F к фигуре F' называется *гомотетией* с центром O и коэффициентом k, а сама фигура F' называется *гомотетичной* фигуре F. Если фигура F выпукла, то и гомотетичная ей фигура F' также является выпуклой (ибо если отрезок AB целиком принадлежит фигуре F, то отрезок $A'B'$ целиком принадлежит фигуре F').

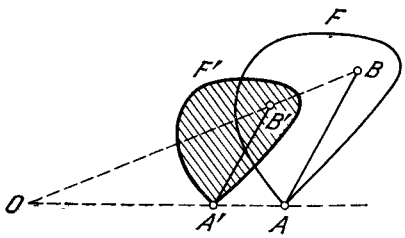


Рис. 69.

Заметим, что если коэффициент гомотетии k меньше единицы, то фигура F' (гомотетичная F с коэффициентом k) представляет собой «уменьшенную копию» фигуры F, а если $k > 1$, то — «увеличенную копию».

Теперь можно сформулировать следующее утверждение, дающее описание всех кругов в плоскости Минковского: *некоторая фигура в том и только в том случае является кругом радиуса* $r \neq 1$ *в плоскости Минковского, если она гомотетична единичному кругу* G *с коэффициентом гомотетии, равным* r. Доказательство этого утверждения несложно, и мы его предоставляем читателю.

Пусть F — некоторая фигура на плоскости Минковского с единичным кругом G. Как и в обычной геометрии, *диаметром* фигуры F (ср. стр. 5) называется н а и б о л ь ш е е из расстояний между точками фигуры F, т. е. наибольшее из чисел $\text{дл.}_G AB$, где A и B — произвольные точки фигуры F (ср. примечание [1]).

Легко понять, что если диаметр фигуры F не превосходит d, то круг K_A радиуса d с центром в произвольной точке A фигуры F содержит целиком всю эту фигуру (рис. 70). Наоборот, если каждый такой круг содержит фигуру F, то диаметр этой фигуры не превосходит d.

Рассмотрим в качестве примера плоскость Минковского, в которой единичным кругом служит квадрат, изображенный на рис. 66. Легко понять, что описанный вокруг него «обычный» круг (определяемый неравенством

$x^2 + y^2 \leqslant 1$ и, следовательно, имеющий в обычной геометрии диаметр 2) имеет в этой геометрии Минковского диаметр, равный $2\sqrt{2}$ (рис. 71).

Пусть теперь l — некоторая прямая и A — точка, не лежащая на ней. Рассматривая круги различного радиуса с центром в точке A, можно среди них выбрать лишь

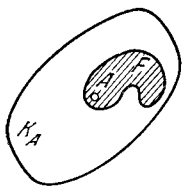


Рис. 70.

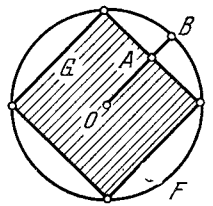


Рис. 71.

один, для которого прямая l будет опорной. Радиус r этого круга называется *расстоянием* от точки A до прямой l.

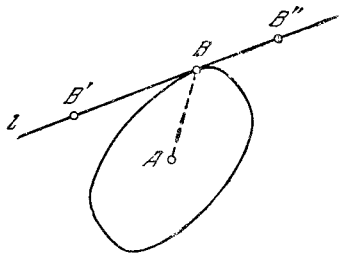


Рис. 72.

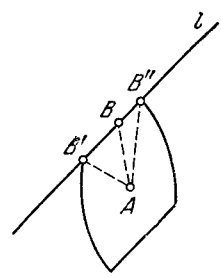


Рис. 73.

Название это объясняется тем, что если B — произвольная точка прямой l, то точка B либо лежит вне выбранного круга (рис. 72) и тогда дл.$_G$ $AB > r$, либо лежит на границе этого круга и тогда дл.$_G$ $AB = r$. Таким образом, расстояние от точки A до прямой l — это (как и в обычной геометрии) н а и м е н ь ш е е из расстояний от точки A до точек прямой l.

Заметим, что в геометрии Минковского расстояние от точки A до прямой l измеряется, вообще говоря, не по перпендикуляру, опущенному из точки A на прямую l (ср. рис. 72). Кроме того, возможно, что на прямой l имеется не одна ближайшая к A точка, а целый отрезок, состоящий из ближайших точек (рис. 73).

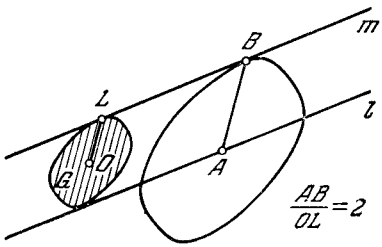


Рис. 74.

Легко видеть, что если l и m — две параллельные прямые, то расстояние от любой точки A прямой l до прямой m не зависит от положения точки A на прямой l (и равно расстоянию от произвольной точки прямой m до прямой l). Это расстояние называется *расстоянием от прямой l до прямой m*. Если, например, l и m — две параллельные опорные прямые единичного круга G, то расстояние между ними равно двум (рис. 74).

Пусть F — произвольная выпуклая фигура, расположенная в плоскости Минковского с единичным кругом G, и пусть l и m — пара параллельных опорных прямых этой фигуры. Расстояние между прямыми l и m называется *шириной* фигуры F в направлении l. Диаметр произвольной фигуры F является наибольшей шириной фигуры F ([12]).

Пусть, например, в качестве единичного круга G принимается квадрат, изображенный на рис. 66, а F — обычный круг, описанный около квадрата G. Тогда ширина фигуры F в направлении, параллельном стороне квадрата G, равна $2\sqrt{2}$, а ширина фигуры F в направлении, параллельном диагонали квадрата G, равна 2. Таким образом, в этой геометрии Минковского круг уже не является фигурой постоянной ширины. Вообще, если фигура F имеет (в геометрии Минковского с единичным кругом G) во всех направлениях одну и ту же ширину d, то она называется в этой геометрии *фигурой постоянной ширины*. Если, например, единичным кругом G является правильный шестиугольник, то равносторонний треугольник, изображенный на рис. 75, является фигурой постоянной ширины.

Любопытно отметить, что любая ограниченная выпуклая фигура F, содержащая внутренние точки (т. е. не являющаяся отрезком или точкой), является фигурой постоянной ширины в некоторой (и притом только в одной!) геометрии Минковского ([13]).

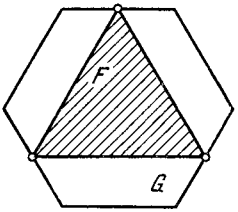


Рис. 75.

Из сказанного ясно, что на случай плоскости Минковского переносятся все определения, рассмотренные в §§ 4, 5 (диаметр выпуклой фигуры, ширина, фигуры постоянной ширины). Поэтому имеет смысл в плоскости Минковского рассматривать задачи, разобранные в первой главе. К рассмотрению этих задач мы и переходим.

§ 10. Задача Борсука на плоскости Минковского

Пусть F — фигура, расположенная в плоскости Минковского с единичным кругом G. Диаметр фигуры F в этой геометрии обозначим через d. Мы будем рассматривать для фигуры F задачу о разбиении ее на части меньшего диаметра. Наименьшее число частей, которые для этого потребуются, обозначим через $a_G(F)$. Ясно, что диаметр как всей фигуры, так и ее частей существенно зависит от того, в какой геометрии Минковского этого диаметр рассматривается (т. е. зависит от единичного круга G). Поэтому и число $a_G(F)$ существенно зависит от выбора единичного круга G.

Например, при обычном определении длины параллелограмм можно разбить на две части меньшего диаметра (рис. 12, *б*). Если же этот параллелограмм рассматривается в плоскости Минковского, где он сам играет роль единичного круга G, то «диаметр» всего параллелограмма и указанных его частей, очевидно, равен двум (в плоскости Минковского «длина» каждой стороны и каждой диагонали параллелограмма G равна двум). Поэтому в рассматриваемом случае параллелограмм G нельзя разбить на три части меньшего «диаметра». Однако четырех частей для такого разбиения уже достаточно (рис. 76).

Иначе говоря, в этом случае $a_G(G) = 4$. Это показывает, что для некоторых фигур F и G может выполняться неравенство $a_G(F) > a(F)$. Бывают, однако, и такие случаи, когда $a_G(F) < a(F)$. В самом деле, если G — квадрат, а F — круг, то легко видеть, что $a_G(F) = 2$ (рис. 77), в то время как $a(F) = 3$.

Задача нахождения величины $a_G(F)$ была рассмотрена в 1957 г. американским геометром Грюнбаумом, которому принадлежит теорема, близкая к формулируемой ниже теореме 4.

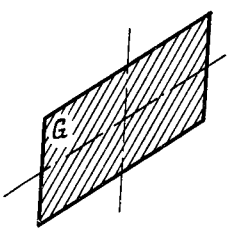


Рис. 76.

Т е о р е м а 4. *Для любой плоской ограниченной фигуры F имеет место соотношение*

$$a_G(F) \leqslant 4,$$

причем знак равенства достигается в том и только в том случае, если выпуклая оболочка фигуры F является параллелограммом, гомотетичным параллелограмму G (т. е. если фигура F содержит четыре точки, являющиеся вершинами параллелограмма, гомотетичного G с коэффициентом гомотетии $d/2$, где d — диаметр фигуры F).

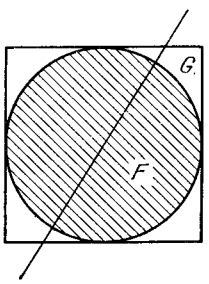


Рис. 77.

Доказательство этой теоремы мы приведем ниже (в § 14).

Результаты § 7 также допускают интересные обобщения на случай геометрии Минковского.

Прежде всего рассмотрим случай, когда единичным кругом плоскости Минковского является некоторый параллелограмм G. В этом случае справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 5. *Пусть F — некоторая фигура диаметра d, расположенная на плоскости Минковского, единичным кругом которой служит параллелограмм G. Равенство*

$$a_G(F) = 2$$

имеет место в том и только в том случае, если фигура F не содержит трех точек, являющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной, равной d.

Разумеется, речь идет о равностороннем треугольнике в смысле рассматриваемой метрики Минковского.

Доказательство. Допустим, что фигура F содержит три точки A, B, C, являющиеся вершинами равностороннего треугольника со стороной d. Ясно, что никакое множество диаметра, меньшего d, не может содержать двух из этих точек. Отсюда следует, что $a_G(F) \geqslant 3$.

Пусть теперь фигура F не содержит трех точек, являющихся вершинами равностороннего треугольника со

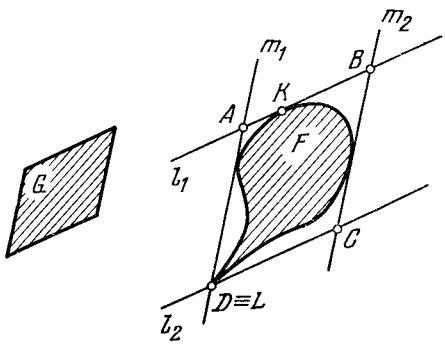


Рис. 78.

стороной d. Проведем четыре опорные прямые l_1, l_2, m_1, m_2 фигуры F, параллельные сторонам параллелограмма G (рис. 78). Эти прямые образуют параллелограмм $ABCD$, содержащий фигуру F. Так как стороны этого параллелограмма являются опорными прямыми фигуры F, то на каждой стороне имеется хотя бы одна точка фигуры F.

Пусть K — точка фигуры F, лежащая на отрезке AB, и L — точка этой фигуры, лежащая на отрезке CD. Так как обе точки K и L принадлежат фигуре F, то $\text{дл.}_G KL \leqslant d$. Таким образом, расстояние между некоторыми точками прямых l_1 и l_2 не превосходит d, и, следовательно, расстояние между прямыми l_1 и l_2 не превосходит d. Аналогично доказывается, что расстояние между прямыми m_1 и m_2 также не превосходит d.

Предположим, что расстояние между прямыми l_1 и l_2 меньше d; тогда, проведя прямую m, параллельную

m_1 и m_2 и пересекающую параллелограмм $ABCD$ (рис. 79), мы рассечем этот параллелограмм (а следовательно, и содержащуюся в нем фигуру F) на две части, диаметр каждой из которых меньше d. Таким образом, в этом случае $a_G(F) = 2$. Аналогично, если расстояние между прямыми m_1 и m_2 меньше d, то $a_G(F) = 2$. Остается рассмотреть случай, когда расстояние между l_1 и l_2, так же как и расстояние между m_1 и m_2, равно d, т.е. $\angle ABCD$ является кругом радиуса $d/2$.

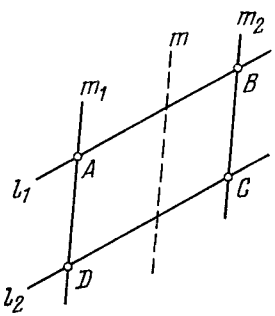


Рис. 79.

Предположим сперва, что ни одна из точек A, C не принадлежит фигуре F. Тогда, как легко видеть, прямая AC разбивает фигуру F на две части, диаметр каждой из которых меньше d. В самом деле, в этом случае можно провести прямые n_1, n_2, параллельные диагонали BD и отсекающие от параллелограмма $ABCD$ шестиугольник, содержащий целиком фигуру F (рис. 80). Прямая AC рассекает этот шестиугольник, а значит, и содержащуюся в нем фигуру F на две

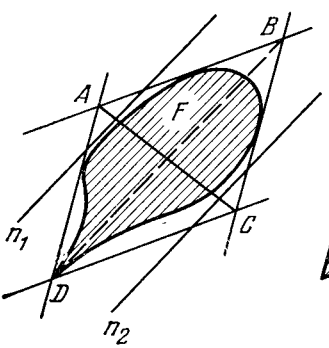
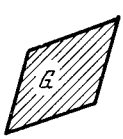


Рис. 80.



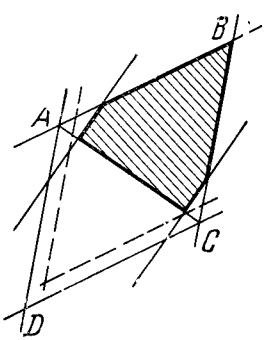


Рис. 81.

части, диаметр каждой из которых меньше d (рис. 81). Таким образом, $a_G(F) = 2$.

Аналогично доказывается, что если ни одна из точек B, D не принадлежит фигуре F, то $a_G(F) = 2$.

Осталось рассмотреть случай, когда хотя бы одна из точек A, C и, кроме того, хотя бы одна из точек B, D принадлежат фигуре F. Однако этот случай реализоваться не может. Действительно, допустим, что хотя бы одна из точек A, C (скажем, точка A) принадлежит фигуре F и, кроме того, хотя бы одна из точек B, D (скажем, точка B) принадлежит фигуре F. Пусть L — точка отрезка CD, принадлежащая фигуре F (напомним, что CD — опорная прямая этой фигуры). Тогда (см. рис. 82)

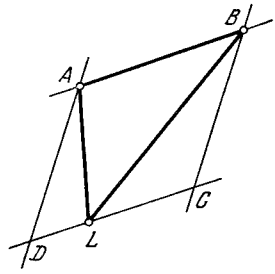


Рис. 82.

$$\text{дл.}_G AB = \text{дл.}_G AL = \text{дл.}_G BL = d,$$

т. е. ABL — равносторонний треугольник со стороной d. Но это противоречит предположению о том, что фигура F не содержит трех точек, являющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной d.

Таким образом, теорема доказана.

Сопоставляя теоремы 4 и 5, мы можем сформулировать следующее утверждение, дающее полное решение вопроса о нахождении величины $a_G(F)$ в случае, когда G является параллелограммом:

Если фигура F диаметра d содержит четыре точки, являющиеся вершинами параллелограмма, гомотетичного G с коэффициентом гомотетии, равным $d/2$ (рис. 83), *то* $a_G(F) = 4$; *если это не выполняется, но фигура F содержит три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника со стороной d* (рис. 84), *то* $a_G(F) = 3$; *в остальных случаях* $a_G(F) = 2$.

Таким образом, задача полного вычисления величины $a_G(F)$ решена в двух случаях: в § 7 дано решение этой задачи в обычной геометрии (т. е. когда G — круг), а здесь было изложено решение этой задачи, когда G — параллелограмм. В остальных случаях полное решение задачи авторам неизвестно; известно лишь (см. теорему 4), что $2 \leqslant a_G(F) \leqslant 3$. Нам кажется правдоподобной следующая гипотеза:

Пусть F — некоторая фигура диаметра d в плоскости Минковского с единичным кругом G, отличным от парал-

лелограмма. Для того чтобы имело место равенство $a_G(F) = 3$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

1) Фигура F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины в рассматриваемой геометрии Минковского.

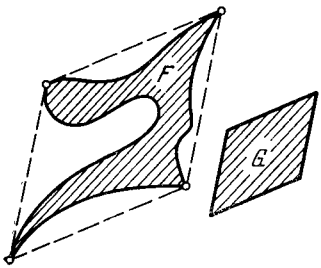


Рис. 83.

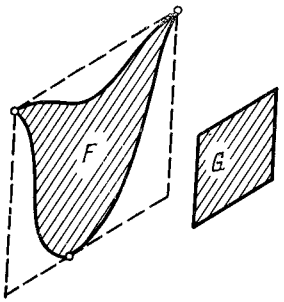


Рис. 84.

2) Если F^* — расширение фигуры F (т. е. пересечение всех кругов радиуса d, содержащих фигуру F), то из каждых двух параллельных опорных прямых фигуры F^*, расстояние между которыми равно d, по крайней мере одна имеет общую точку с F.

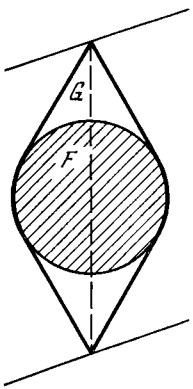


Рис. 85.

Заметим, что если фигура G является обычным кругом, то второе условие является излишним: можно показать, что оно вытекает из первого. В общем же случае условие 2) необходимо. В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть F — обычный круг, а G — фигура, изображенная на рис. 85. Тогда, как легко видеть, F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины (единственной фигурой постоянной ширины, содержащей F, является G), т. е. условие 1) выполняется. Условие же 2) не выполняется. В то же время $a_G(F) = 2$ (см. пунктир на рис. 85). Таким образом, выполнение одного только условия 1) в общем случае для выполнения равенства $a_G(F) = 3$ недо-

статочно. Это, в первую очередь, связано с тем обстоятельством, что $a_G(F)$, вообще говоря, не совпадает с числом $a_G(F^*)$ (рис. 85).

Выше у нас осталась недоказанной теорема 4, содержащая оценку величины $a_G(F)$. Из нее, в частности, следует, что для фигуры $F = G$ имеют место следующие утверждения: $a_G(G) = 4$, если G — параллелограмм, и $a_G(G) \leqslant 3$ во всех остальных случаях. Но равенство $a_G(G) = 2$ невозможно (это доказывается так же, как в случае, когда G является кругом, стр. 6). Таким образом, если G — не параллелограмм, то $a_G(G) = 3$.

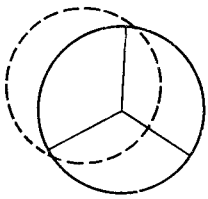


Рис. 86.

В случае, если G — обычный круг или параллелограмм, разбиение на три и соответственно на четыре части меньшего диаметра показано на рис. 86, 76. В этих случаях каждая часть не только имеет меньший диаметр, но также покрывается кругом меньшего диаметра в соответствующей геометрии Минковского. Естественно возникает предположение, что так же дело будет обстоять в геометрии Минковского с л ю б ы м кругом G. Иными словами, возникает следующее предположение:

Всякая выпуклая центрально-симметричная фигура G, отличная от параллелограмма, может быть разбита на три части, каждая из которых покрывается фигурой, гомотетичной G с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы (т. е. «кругом» меньшего диаметра).

Это предположение действительно справедливо и притом не только для центрально-симметричных, но и для л ю б ы х выпуклых фигур. Доказательству этого факта (и на его основе теоремы 4) будет посвящена следующая глава.

ГЛАВА III

ПОКРЫТИЕ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР ГОМОТЕТИЧНЫМИ

§ 11. Постановка задачи

В этой главе мы будем рассматривать следующую задачу. Дана некоторая плоская выпуклая ограниченная фигура F. Найти минимальное число гомотетичных «уменьшенных копий» фигуры F, которыми можно покрыть всю фигуру F. Это минимальное число обозначим через $b(F)$. Более точно, равенство $b(F) = m$ означает, что существуют такие фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_m$, гомотетичные фигуре F с некоторыми центрами гомотетии и с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы, что в своей совокупности фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_m$ покрывают всю фигуру F (рис. 87); при этом число m минимально, т. е. меньшего чем m числа гомотетичных фигур для этой цели недостаточно.

Задача о том, какие значения может принимать $b(F)$, была поставлена в 1960 г. И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом. Несколько ранее эта задача (однако в иной формулировке) рассматривалась немецким математиком Ф. Леви.

Для примера рассмотрим случай, когда фигура F есть круг. Тогда меньшими гомотетичными фигурами являются произвольные круги меньшего диаметра. Нетрудно понять, что двумя такими кругами невозможно покрыть исходный круг F, т. е. $b(F) \geqslant 3$. В самом деле, пусть F_1 и F_2 — два круга меньшего диаметра и O_1, O_2 — их центры (рис. 88). Проведем через центр O исходного круга F перпендикуляр к линии центров O_1O_2. Этот перпендикуляр пересекает окружность круга F в двух точках A и B. Пусть, например, точка A расположена по ту же сторону от прямой O_1O_2, что и точка O (если прямая O_1O_2 проходит через точку O, то можно взять любую из точек A, B). Тогда $AO_1 \geqslant AO = r$, $AO_2 \geqslant AO = r$, где r — ради-

ус круга F. Так как круги F_1, F_2 имеют радиусы, меньшие r, то точка A не принадлежит ни одному из них, т. е. круги F_1, F_2 не покрывают всего круга F.

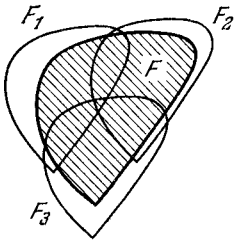


Рис. 87.

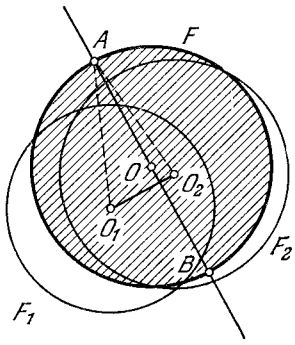


Рис. 88.

С другой стороны, круг F легко покрыть тремя кругами несколько меньшего диаметра (рис. 89). Таким образом, в случае круга $b(F) = 3$.

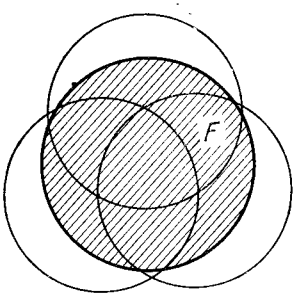


Рис. 89.

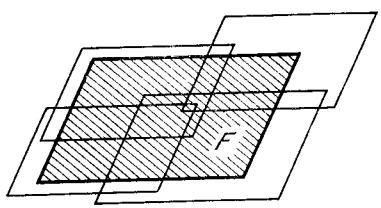


Рис. 90.

Рассмотрим еще случай, когда F представляет собой параллелограмм. Ясно, что никакой параллелограмм, гомотетичный F с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, не может содержать сразу д в у х вершин параллелограмма F. Иначе говоря, четыре вершины параллелограмма F должны принадлежать четырем р а з л и ч н ы м гомотетичным параллелограммам, т. е. $b(F) \geqslant 4$. Четырех же гомотетичных фигур явно достаточно (рис. 90). Таким образом, в случае параллелограмма $b(F) = 4$.

§ 12. Другая формулировка задачи

Задаче о покрытии фигуры меньшими гомотетичными фигурами можно придать другую форму, сближающую ее с задачей Борсука о разбиении фигуры на части меньшего диаметра.

Пусть F — выпуклая фигура и G — некоторая ее часть. Будем говорить, что часть G фигуры F *имеет габарит, равный* k, если существует фигура F', гомотетичная F с коэффициентом k, которая содержит G, но никакая фигура, гомотетичная F с коэффициентом, меньшим k, не содержит целиком G [14]). Очевидно, что если часть G совпадает со всей фигурой F, то ее габарит равен 1. Поэтому для любой не совпадающей с F части G фигуры F габарит $k \leqslant 1$. Не следует, однако, думать, что если часть G не совпадает со всей фигурой F, то ее габарит k непременно м е н ь ш е единицы. Если, например, F представляет собой круг, а часть G — вписанный в него остроугольный треугольник (рис. 91), то габарит части G равен единице (ибо никакой круг меньшего диаметра не содержит целиком треугольника G). Часть G фигуры F мы будем называть *частью меньшего габарита*, если ее габарит $k < 1$.

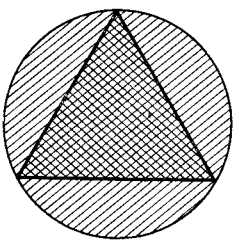


Рис. 91.

Пользуясь понятием габарита, мы можем придать определению величины $b(F)$ другую форму: $b(F)$ *есть минимальное число частей меньшего габарита, на которые можно разбить данную выпуклую фигуру* F. Нетрудно понять, что это определение величины $b(F)$ эквивалентно предыдущему. В самом деле, пусть $F_1, F_2, \ldots, F_m$ — меньшие гомотетичные фигуры, покрывающие F. Обозначим через $G_1, G_2, \ldots, G_m$ части фигуры F, высекаемые из нее фигурами $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Очевидно, что каждая из частей $G_1, G_2, \ldots, G_m$ фигуры F имеет габарит меньше единицы. Таким образом, если фигура F может быть покрыта m меньшими гомотетичными фигурами, то ее можно разбить на m частей меньшего габарита. Обратно, если фигура F может быть разбита на m частей $G_1, G_2, \ldots, G_m$ меньшего габарита, то существуют фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_m$, содержащие соответственно части $G_1, G_2, \ldots, G_m$ и гомотетичные

фигуре F с коэффициентами, меньшими единицы. Эти фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_m$ и образуют покрытие фигуры F меньшими гомотетичными фигурами.

Таким образом, задачу о покрытии выпуклой фигуры меньшими гомотетичными фигурами можно еще сформулировать как *задачу о разбиении фигуры F на части меньшего габарита*. В этой форме она весьма напоминает изучавшуюся в главе I задачу Борсука.

Однако связь между этими задачами не только внешняя. В самом деле, если фигура F имеет диаметр d, то фигура, гомотетичная F с коэффициентом k, имеет диаметр kd. Отсюда следует, что если выпуклая фигура F имеет диаметр d, то всякая ее часть меньшего габарита является в то же время и частью меньшего диаметра. (Обратное, вообще говоря, неверно; например, равносторонний треугольник, вписанный в круг F диаметра d, является частью меньшего диаметра, но имеет габарит, равный единице, см. рис. 91.) Поэтому если выпуклая фигура F может быть разбита на m частей меньшего габарита, то она подавно может быть разбита на m частей меньшего диаметра (но, вообще говоря, не наоборот, как показывает пример параллелограмма).

Таким образом, *для любой выпуклой фигуры F справедливо неравенство*

$$a(F) \leqslant b(F).$$

Отметим, что задача о разбиении на части меньшего габарита относится лишь к выпуклым фигурам, в то время как задача Борсука о разбиении на части меньшего диаметра ставилась для любых (даже невыпуклых) фигур.

§ 13. Решение задачи о покрытии

Как мы видели в § 11, в задаче о покрытии выпуклой фигуры меньшими гомотетичными фигурами (в отличие от задачи Борсука) круг уже не является фигурой, требующей наибольшего числа покрывающих фигур: для параллелограмма число $b(F)$ принимает большее значение, чем для круга.

Естественно возникает вопрос, существуют ли плоские выпуклые фигуры, для которых величина $b(F)$ принимает еще большее значение, чем для параллелограмма?

Оказывается, что таких фигур не существует; более того, среди всех плоских выпуклых фигур т о л ь к о для параллелограммов выполняется равенство $b(F) = 4$. Иными словами, имеет место следующая теорема, установленная в 1960 г. И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом (несколько ранее, в 1955 г., Ф. Леви был получен другой результат, из которого также выводится эта теорема):

Т е о р е м а 6. *Для любой плоской ограниченной выпуклой фигуры F, не являющейся параллелограммом, справедливо равенство $b(F) = 3$; если F — параллелограмм, то $b(F) = 4$.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 6, мы введем одно определение и докажем несколько вспомогательных предложений *).

Пусть F — некоторая выпуклая фигура и A, B — две ее граничные точки. Условимся называть отрезок AB

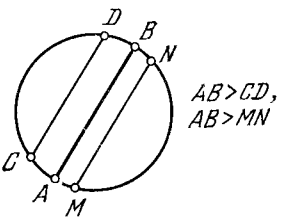


Рис. 92.

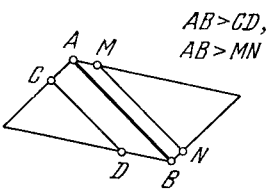


Рис. 93.

большой хордой фигуры F, если всякая хорда этой фигуры, параллельная AB, имеет меньшую длину. Например, у круга все диаметры и только они являются большими хордами (рис. 92). У параллелограмма большими хордами являются только его диагонали (рис. 93). Если, далее, l_1, l_2 — две параллельные опорные прямые выпуклой фигуры F, причем каждая из них имеет только одну общую точку с фигурой F, то отрезок, соединяющий эти общие точки, является большой хордой фигуры F (рис. 94). Если одна из двух параллельных опорных прямых l_1, l_2 имеет с фигурой F единственную общую точку A, а другая имеет с F общий отрезок BC, то отрезок, соединяющий точку A с лю-

*) В общей сложности (вместе со вспомогательными предложениями) доказательство теоремы 6 занимает 10 страниц. Дальше (в § 17) будет приведено еще одно доказательство этой теоремы.

бой точкой D отрезка BC, является большой хордой фигуры F (рис. 95). Наконец, если каждая из двух опорных прямых l_1 и l_2 имеет с фигурой F общий отрезок, то обе диагонали трапеции, вершинами которой служат концы этих отрезков, являются большими хордами фигуры F

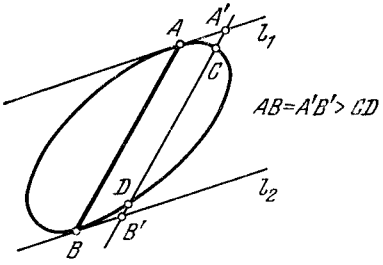


Рис. 94.

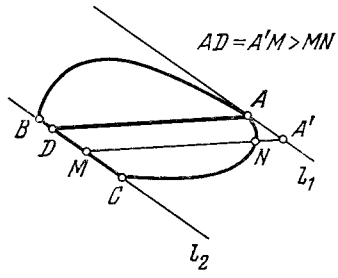


Рис. 95.

(рис. 96). Из сказанного следует, что *если* l_1 *и* l_2 *— две параллельные опорные прямые выпуклой фигуры* F, *то найдется по крайней мере один отрезок с концами на этих прямых, являющийся большой хордой фигуры* F.

Т е о р е м а 7. *Всякая выпуклая фигура* F, *отличная от параллелограмма, имеет по крайней мере три большие хорды.*

Иначе говоря, параллелограмм является е д и н с т в е н н о й выпуклой фигурой, имеющей две большие хорды. Треугольник и правильный шестиугольник являются примерами фигур, имеющих ровно три большие хорды. Правильный $2n$-угольник имеет ровно n больших хорд, а круг их имеет бесконечно много.

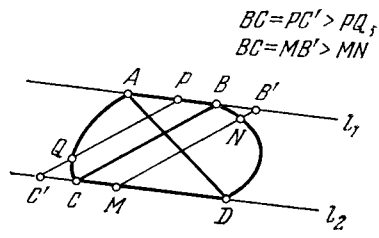


Рис. 96.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Предположим сначала, что граница выпуклой фигуры F не содержит ни одного прямолинейного отрезка. Проведем две параллельные опорные прямые l_1 и l_2 фигуры F, и пусть A, B — общие точки этих двух прямых с фигурой F. Тогда AB — большая хорда. Пусть C — произвольная граничная точка фигуры F, отличная от A и B. Проведем

через точку C опорную прямую m_1 фигуры F, и пусть m_2 — параллельная ей опорная прямая. Общую точку прямой m_2 с фигурой F обозначим через D (не исключено, что она совпадает с одной из точек A или B).

Отрезок CD является второй большой хордой фигуры F (рис. 97). Возьмем, наконец, какую-либо граничную точку E фигуры F, отличную от A, B, C, D. Проведя

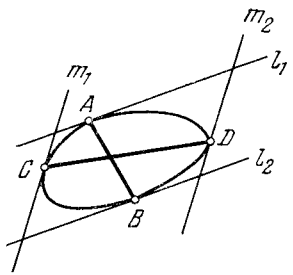


Рис. 97.

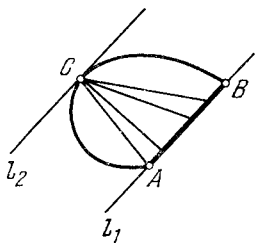


Рис. 98.

теперь опорную прямую n_1 через точку E и затем параллельную ей опорную прямую n_2, мы получим еще одну большую хорду. Таким образом, в рассматриваемом случае мы нашли три большие хорды фигуры F (впрочем, из проведенного рассуждения ясно, что в этом случае фигура F имеет бесконечное множество больших хорд).

Предположим теперь, что граница фигуры F содержит хотя бы один прямолинейный отрезок, т. е. можно провести опорную прямую l_1 фигуры F, имеющую с этой фигурой общий отрезок AB. Обозначим через l_2 опорную прямую, параллельную l_1. Если l_2 имеет с фигурой F только одну общую точку C, то любой отрезок, соединяющий точку C с какой-либо точкой отрезка AB, является большой хордой, т. е. и в этом случае мы имеем бесконечное множество больших хорд (рис. 98).

Наконец, предположим, что и прямая l_2 имеет с фигурой F общий отрезок DC. Тогда выпуклая фигура F должна содержать всю трапецию $ABCD$, причем обе диагонали этой трапеции являются большими хордами фигуры F. Если фигура F не совпадает с этой трапецией, то можно провести опорную прямую p_1 фигуры F, не имеющую

общих точек с трапецией $ABCD$ (рис. 99). Проведя теперь опорную прямую p_2, параллельную p_1, мы получим третью большую хорду (с концами на прямых p_1 и p_2).

Остается рассмотреть случай, когда фигура F совпадает с трапецией $ABCD$. Если $AB \neq CD$, то больший из

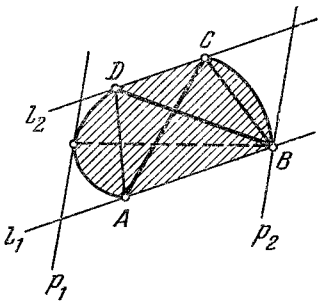


Рис. 99.

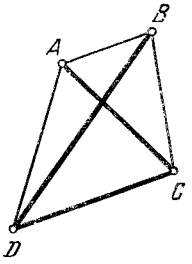


Рис. 100.

этих двух отрезков является третьей большой хордой трапеции $ABCD$ (т. е. фигуры F; см. рис. 100). Если же $AB = CD$, то F — параллелограмм. Очевидно, что у параллелограмма только две большие хорды.

Теорема доказана.

Лемма 10. *Пусть AB — большая хорда выпуклой фигуры F, DE — параллельная ей хорда и O — произвольная внутренняя точка фигуры F. Обозначим через F_1 часть фигуры F, отсекаемую хордой DE и не содержащую хорду AB. Тогда существует фигура G, гомотетичная фигуре F с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, целиком содержащая фигуру F_1 и точку O* (рис. 101).

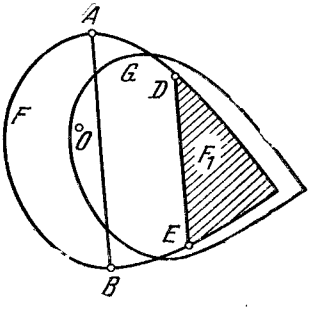


Рис. 101.

Доказательство. Пусть PQ — хорда фигуры F, параллельная хордам AB и DE и расположенная между ними. Обозначим через F' часть фигуры F, отсекаемую хордой PQ и содержащую хорду DE. Ясно, что фигура

F' целиком содержит F_1 (рис. 102). Так как AB — большая хорда, то $AB > PQ$. Обозначим через G' фигуру, гомотетичную фигуре F с центром гомотетии в точке T пересечения прямых AP и BQ и с коэффициентом гомотетии, равным PQ/AB (рис. 103). Очевидно, что при этой гомотетии хорда AB фигуры F преобразуется в хорду PQ фигуры G'.

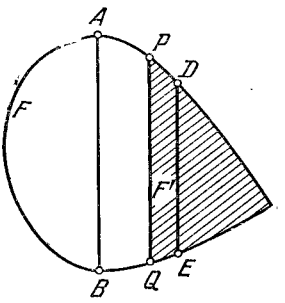


Рис. 102.

Пусть M — произвольная точка фигуры F', не лежащая на хорде PQ. Проведем из точек A и B прямые, параллельные соответственно PM и QM, и обозначим через N точку их пересечения (рис. 103). Точка N принадлежит фигуре F, так как эта точка принадлежит многоугольнику $ABQMP$, который целиком содержится в F. При рассматриваемой гомотетии точка N фигуры F переходит в точку M. Отсюда следует, что точка M принадлежит фигуре G'. Следовательно, любая точка M фигуры F' принадлежит фигуре G', т. е. F' покрывается фигурой G'.

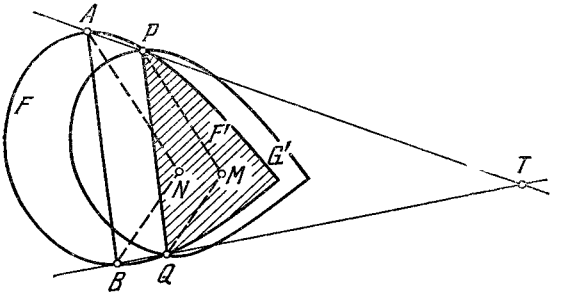


Рис. 103.

Итак, какова бы ни была хорда PQ, параллельная хордам AB и DE и расположенная между ними, проведенное построение дает нам фигуру G', которая гомотетична F с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, и целиком содержит фигуру F', а следовательно и фигуру F_1.

Остается доказать, что, выбрав надлежащим образом хорду PQ, можно добиться того, чтобы и точка O принадлежала фигуре G',— это и даст нам искомую фигуру G.

Если точка O расположена по ту же сторону от AB, что и хорда DE, то достаточно в качестве PQ взять хорду, отделяющую точку O от отрезка AB. Действительно,

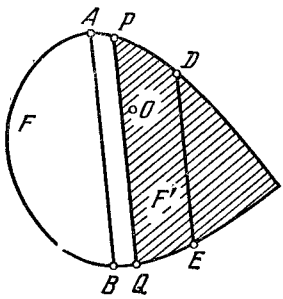


Рис. 104.

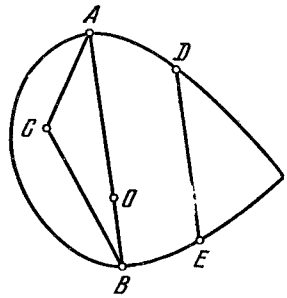


Рис. 105.

при таком выборе хорды PQ (рис. 104) точка O принадлежит фигуре F' и, значит, содержится в G'.

Предположим теперь, что точка O находится либо на хорде AB, либо по другую сторону от этой хорды, чем отрезок DE. Если точка O лежит на хорде AB, то через C мы обозначим произвольную точку фигуры F, лежащую по другую сторону от хорды AB, чем отрезок DE (рис. 105). Если же O не лежит на отрезке AB, то из произвольной внутренней точки H отрезка AB проведем луч, проходящий через точку O, и за C примем точку пересечения этого луча с границей фигуры F (рис. 106). В обоих случаях точка O принадлежит треугольнику ABC, но не лежит на ломаной ACB, причем треугольник ABC лежит по другую сторону от хорды AB, чем отрезок DE.

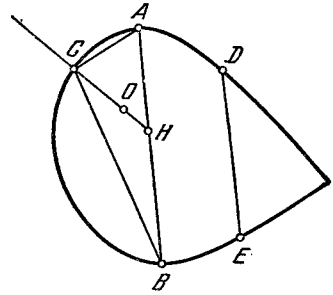


Рис. 106.

Проведем из точки O лучи l_1, l_2, имеющие направления векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, и обозначим через K и L точки пересечения этих лучей с границей фигуры F (рис. 107). Ясно, что точки K и L лежат по ту же сторону от AB, что и отрезок DE. Мы выберем теперь хорду $PQ \parallel AB$ таким образом, чтобы отрезок AB лежал по одну сторону от прямой PQ, а все четыре точки D, K, L, E — по другую сторону.

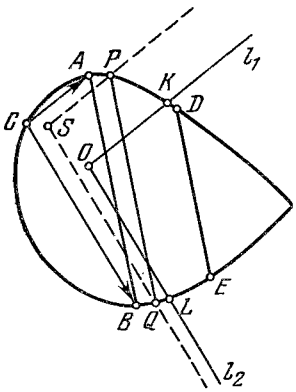


Рис. 107.

Проведем теперь через точки P и Q прямые, соответственно параллельные прямым AC и CB. Точку пересечения этих прямых обозначим через S. При указанной выше гомотетии с центром T и с коэффициентом PQ/AB треугольник ABC переходит, очевидно, в треугольник PQS. Остается показать, что точка O принадлежит треугольнику PQS. Действительно, это будет означать, что точка, переходящая в точку O при гомотетии, принадлежит треугольнику ABC, а значит и фигуре F, откуда будет следовать, что точка O принадлежит фигуре G'.

В силу выбора хорды PQ, точки K и L лежат внутри угла PSQ, и следовательно, точка O также лежит внутри этого угла (рис. 107). В то же время точки O и S лежат по одну сторону от прямой PQ. Из этого следует, что O — внутренняя точка треугольника PQS.

Лемма 11. *Всякие две большие хорды выпуклой фигуры F пересекаются (внутри F или на ее границе).*

Доказательство. Пусть AB — большая хорда фигуры F и CD — не пересекающая ее хорда. Докажем, что CD не является большой хордой. Если хорда CD параллельна AB, то это очевидно. Предположим поэтому, что CD не параллельна AB, и пусть, для определенности, точка C ближе расположена к прямой AB, чем D (рис. 108). Проведем хорду CM, параллельную AB. Тогда точки B и D расположены по разные стороны прямой CM, и потому отрезок BD пересекается с прямой CM в некоторой точке K. В силу выпуклости фигуры F, точка K от-

Остается доказать, что, выбрав надлежащим образом хорду PQ, можно добиться того, чтобы и точка O принадлежала фигуре G',— это и даст нам искомую фигуру G.

Если точка O расположена по ту же сторону от AB, что и хорда DE, то достаточно в качестве PQ взять хорду, отделяющую точку O от отрезка AB. Действительно,

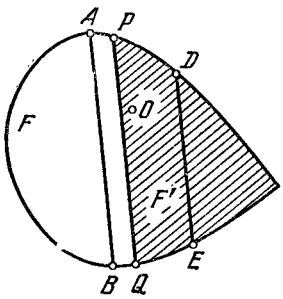


Рис. 104.

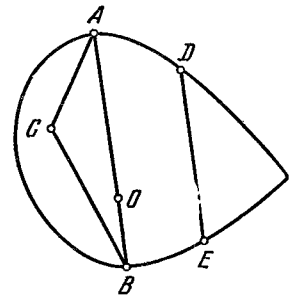


Рис. 105.

при таком выборе хорды PQ (рис. 104) точка O принадлежит фигуре F' и, значит, содержится в G'.

Предположим теперь, что точка O находится либо на хорде AB, либо по другую сторону от этой хорды, чем отрезок DE. Если точка O лежит на хорде AB, то через C мы обозначим произвольную точку фигуры F, лежащую по другую сторону от хорды AB, чем отрезок DE (рис. 105). Если же O не лежит на отрезке AB, то из произвольной внутренней точки H отрезка AB проведем луч, проходящий через точку O, и за C примем точку пересечения этого луча с границей фигуры F (рис. 106). В обоих случаях точка O принадлежит треугольнику ABC, но не лежит на ломаной ACB, причем треугольник ABC лежит по другую сторону от хорды AB, чем отрезок DE.

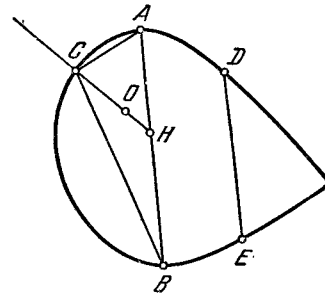


Рис. 106.

же вывод можно сделать и относительно части фигуры F, отсекаемой хордой KL и не содержащей точку A. Что же касается остающейся части фигуры F (т. е. криволинейного «сектора» OLD), то путем выбора точки O достаточно близко к A эта часть может быть заключена в сколь угодно малый круг с центром в точке A. Следовательно, эта часть фигуры F покрывается одной фигурой, гомотетичной F со сколь угодно малым коэффициентом гомотетии.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда каждые две из трех больших хорд пересекаются во внутренней точке фигуры F. Обозначим шесть точек, являющихся концами этих трех хорд, обходя кривую против часовой стрелки, буквами A, B, C, D, E, H, так что хорды, о которых идет речь, будут обозначены

$$AD,\ BE \text{ и } CH.$$

Пусть MN — хорда, параллельная AD и отделяющая AD от точек B и C (рис. 110). Часть фигуры F, отсекаемую хордой MN и не содержащую AD, обозначим через F_1. Далее, проведем хорду PQ, параллельную BE и отделяющую BE от точек M, A и H (рис. 111). Часть фигуры F, отсекаемую этой хордой и не содержащую BE, обозначим через F_2. Наконец, проведем хорду ST, параллельную CH и отделяющую CH от точек N и Q (рис. 112). Эта хорда отсекает от F фигуру F_3 (не содержащую CH).

Пусть теперь O — произвольная внутренняя точка фигуры F. В силу леммы 10, существует фигура G_j ($j = 1, 2, 3$), гомотетичная F с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, и содержащая фигуру F_j и точку O. Следовательно, G_1 содержит «сектор», отсекаемый от F ломаной MON (рис. 113), а фигуры G_2 и G_3 содержат аналогичные секторы POQ и SOT (рис. 114, 115). Эти три сектора и тем более фигуры G_1, G_2, G_3 покрывают всю фигуру F.

Таким образом, и в этом случае

$$b(F) \leqslant 3.$$

Покажем, наконец, что $b(F) \geqslant 3$ для любой выпуклой фигуры F. Пусть F_1, F_2 — две произвольные фигуры, гомотетичные F с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы, и O_1, O_2 — соответствующие центры гомотетии. Проведем прямую l, проходящую через точки O_1 и O_2, и пусть M — точка фигуры F, наиболее удаленная от прямой l. Тогда все точки фигуры F_1 расположены от l

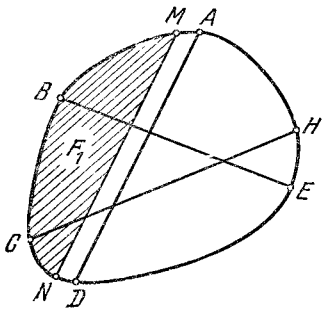


Рис. 110.

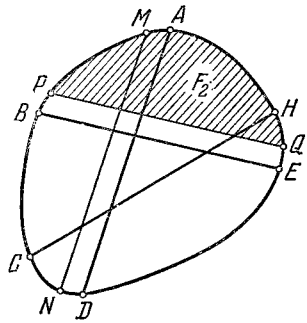


Рис. 111.

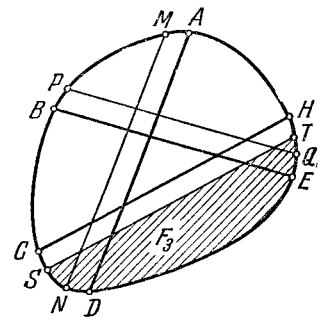


Рис. 112.

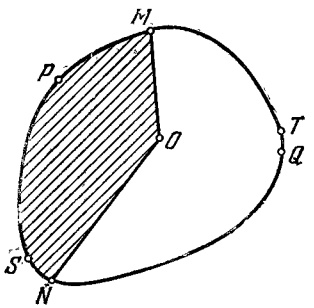


Рис. 113.

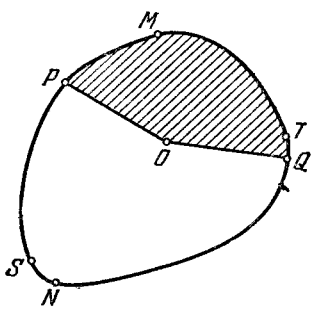


Рис. 114.

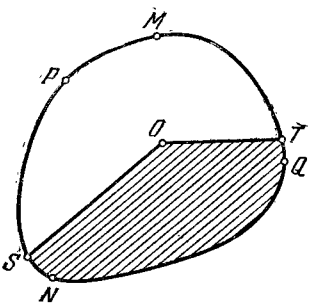


Рис. 115.

на меньшем расстоянии, чем точка M (рис. 116), и то же справедливо для фигуры F_2. Следовательно, точка M не покрывается ни одной из фигур F_1 и F_2, откуда и вытекает, что $b(F) > 2$.

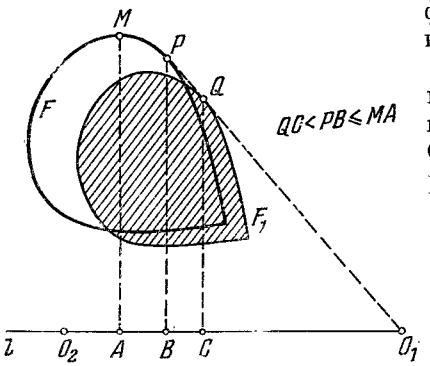


Рис. 116.

Итак, если фигура F не является параллелограммом, то $b(F) = 3$. Очевидно, что для параллелограмма $b(F)=4$.

Теорема доказана.

§ 14. Доказательство теоремы 4

Приступим теперь к доказательству теоремы 4.

Прежде всего рассмотрим случай, когда фигура F выпукла. Заметим, что неравенство $a(F) \leqslant b(F)$ сохраняет свою силу и в случае плоскости Минковского:

$$a_G(F) \leqslant b(F).$$

Это устанавливается точно так же, как и в обычной геометрии (стр. 53). Следовательно, если фигура F не является параллелограммом, то, в силу теоремы 6, $a_G(F) \leqslant b(F) = 3$.

Пусть теперь F — параллелограмм. Проведем через центр O фигуры G две прямые, параллельные диагоналям параллелограмма F, и обозначим через A_1C_1 и B_2D_2 отрезки, высекаемые фигурой G на этих прямых. На отрезках A_1C_1 и B_2D_2, как на диагоналях, построим два параллелограмма со сторонами, параллельными сторонам параллелограмма F (рис. 117). Обозначим через F' меньший из этих двух параллелограммов; пусть это будет параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ с диагональю A_1C_1. Так как параллелограммы F и F' гомотетичны, то $a_G(F) = a_G(F')$, и потому в дальнейших рассуждениях мы можем вместо F рассматривать параллелограмм F'.

Ясно, что дл.$_G$ $A_1C_1 = 2$, и потому диаметр параллелограмма F' не меньше двух. (Здесь и дальше мы имеем в

виду «диаметры» относительно длин, определяемых фигурой G.) Но диаметр параллелограмма F' и не больше двух, ибо он заключен целиком в фигуре G, имеющей диаметр 2.

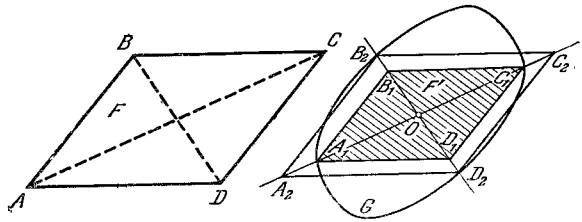


Рис. 117.

Итак, диаметр параллелограмма F' равен двум.

Проведем теперь через точку O прямую p, параллельную сторонам A_1B_1 и C_1D_1, и обозначим через M и N

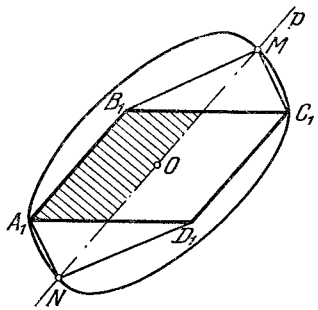


Рис. 118.

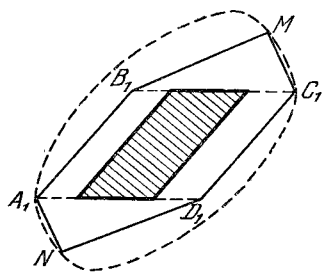


Рис. 119.

точки ее пересечения с границей фигуры G. Если точки M и N не лежат на сторонах B_1C_1 и A_1D_1 параллелограмма F' (рис. 118), то весь шестиугольник $A_1B_1MC_1D_1N$ содержится в фигуре G. Отсюда легко вытекает, что диаметр каждой из «половинок», на которые прямая p рассекает параллелограмм F', меньше двух (рис. 119), так что $a_G(F') = 2$. Если же точки M и N лежат на сторонах параллелограмма F', то прямые B_1C_1 и A_1D_1 должны быть о п о р н ы м и прямыми фигуры G (ибо через граничную точку M фигуры G должна проходить опорная прямая, а

всякая прямая, отличная от B_1C_1, рассекает параллелограмм F', а значит и фигуру G). Таким образом (рис. 120), вся фигура G заключена в полосе между прямыми B_1C_1 и A_1D_1.

Итак, либо $a_G(F') = 2$, либо же фигура G заключена в полосе между прямыми B_1C_1 и A_1D_1.

Аналогично, проводя прямую q, параллельную сторонам B_1C_1 и A_1D_1, мы найдем, что либо $a_G(F') = 2$, либо же фигура G заключена в полосе между прямыми A_1B_1 и C_1D_1. Объединяя оба случая вместе, заключаем, что либо $a_G(F') = 2$, либо же фигура G заключена внутри обеих

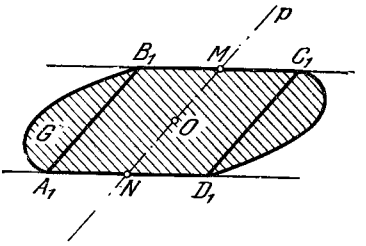


Рис. 120.

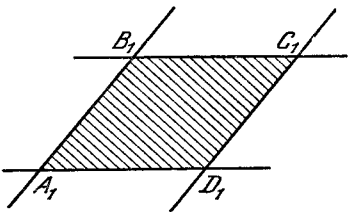


Рис. 121.

указанных полос, т. е. содержится в параллелограмме F' (рис. 121). Но в последнем случае фигура G должна совпадать с параллелограммом F' (ибо она содержит параллелограмм F').

Итак, либо $a_G(F) = a_G(F') = 2$, либо же фигура G совпадает с параллелограммом F' (т. е. гомотетична F), и тогда, как мы уже знаем, $a_G(F) = a_G(F') = 4$. Иными словами, для выпуклых фигур F утверждение теоремы 4 справедливо.

Пусть теперь F — невыпуклая фигура. Если выпуклая оболочка $\widetilde{F}$ фигуры F является параллелограммом, гомотетичным параллелограмму G (рис. 83), то $a_G(F) = 4$. Если же фигура $\widetilde{F}$ не гомотетична G, то, в силу уже доказанного, $a_G(\widetilde{F}) \leqslant 3$, а так как F содержится в $\widetilde{F}$, то подавно $a_G(F) \leqslant 3$.

Теорема доказана.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧА ОСВЕЩЕНИЯ

§ 15. Постановка задачи

В этой последней главе мы рассмотрим еще одну задачу из теории выпуклых фигур. По своей постановке эта задача весьма непохожа на предыдущие, но, как мы увидим, она тесно связана с ними.

Пусть F — плоская ограниченная выпуклая фигура и l — произвольное направление в плоскости этой фигуры. Будем говорить, что граничная точка A фигуры F является точкой освещенности относительно направления l, если параллельный пучок лучей, имеющих направление l, «освещает» на границе фигуры F точку A

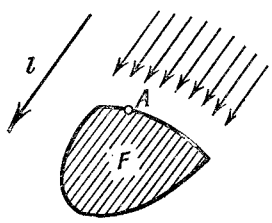


Рис. 122.

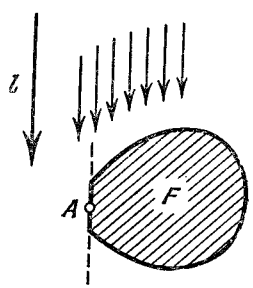


Рис. 123.

и некоторую ее окрестность (рис. 122). Заметим, что если прямая, параллельная направлению l и проходящая через точку A, является опорной для фигуры F (рис. 123), то точку A мы не считаем точкой освещенности относительно

направления l. Иначе говоря, точка A является точкой освещенности, если выполнены следующие два условия:

1°. Прямая p, параллельная направлению l и проходящая через точку A, не является опорной прямой фигуры F (т. е. на прямой p имеются внутренние точки фигуры F).

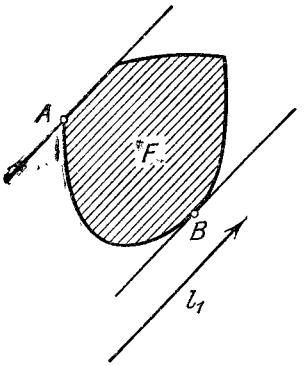


Рис. 124.

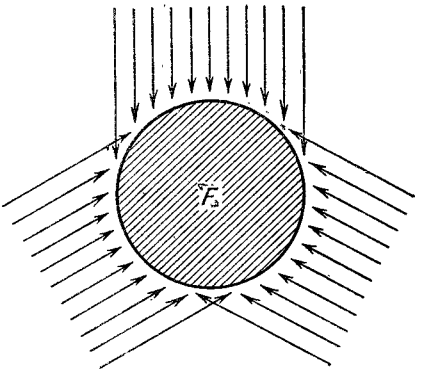


Рис. 125.

2°. Точка A является **первой** точкой фигуры F, которую мы встречаем, двигаясь по прямой p в направлении l.

Условимся, далее, говорить, что направления l_1, l_2,... ...,l_m *освещают* всю границу фигуры F, если каждая граничная точка фигуры F является точкой освещенности относительно хотя бы одного из этих направлений. Наконец, обозначим через $c(F)$ наименьшее из таких натуральных чисел m, что на плоскости существуют m направлений, освещающих всю границу фигуры F. Задачу о нахождении числа $c(F)$ мы будем называть **задачей освещения** границы фигуры F. Эта задача освещения была поставлена в 1960 г. В. Г. Болтянским.

Легко доказать, что для любой плоской фигуры F всегда $c(F) \geqslant 3$. В самом деле, пусть F — плоская ограниченная выпуклая фигура и l_1, l_2 — произвольные направления. Проведем две опорные прямые фигуры F, параллельные направлению l_1, и пусть A и B — граничные точки фигуры F, лежащие на этих опорных прямых (рис. 124). Тогда ни одна из точек A, B не является точкой

освещенности для направления l_1, а направление l_2 освещает не более чем одну из этих точек. Итак, двух направлений недостаточно для освещения всей границы фигуры F.

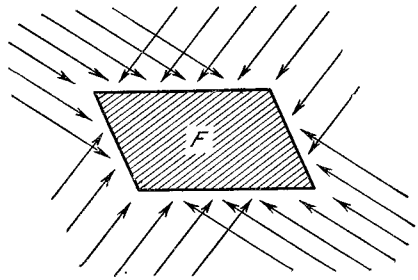


Рис. 126.

В случае круга (рис. 125) для освещения границы достаточно трех направлений. Для параллелограмма (рис. 126) трех направлений уже недостаточно (ибо ни одно направление не освещает сразу двух вершин параллелограмма), а четыре направления позволяют осветить всю границу параллелограмма. Иначе говоря, для круга $c(F) = 3$, а для параллелограмма $c(F) = 4$.

§ 16. Решение задачи освещения

При решении задачи освещения мы используем вспомогательные предложения, установленные в § 13, а также следующую лемму:

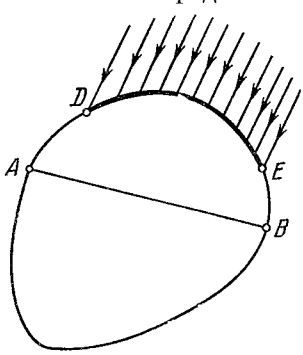


Рис. 127.

Лемма 12. *Пусть F — выпуклая фигура, AB — ее большая хорда и D, E — граничные точки фигуры F, лежащие по одну сторону от хорды AB. Тогда всю дугу DE, лежащую по одну сторону от хорды AB, можно осветить одним направлением* (рис. 127).

Доказательство. Пусть MN — хорда, параллельная AB и отделяющая отрезок AB от точек D и E. Так как $MN < AB$, то можно взять на отрезке AB такие две внутренние точки P и Q, что $PQ = MN$, и следовательно, $PQNM$ — параллелограмм. Обозначим через l направление, определяемое вектором $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$. Ясно, что всякая прямая, параллельная l и проходящая

через произвольную точку C дуги MN (не содержащей точек A и B; см. рис. 128), обладает тем свойством, что при движении по ней из точки C в направлении l мы пересекаем отрезок MN, который состоит из внутренних точек фигуры F. Иными словами, каждая точка C указанной дуги MN освещается направлением l. В частности, вся дуга DE освещается направлением l.

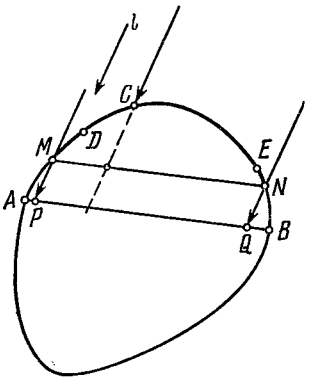


Рис. 128.

Лемма доказана.

Как и в случае задачи о покрытии фигуры меньшими гомотетичными частями, в задаче освещения параллелограмм играет особую роль. Именно, имеет место следующая

Теорема 8. *Для любой плоской ограниченной выпуклой фигуры F, не являющейся параллелограммом, справедливо равенство $c(F)=3$; если F — параллелограмм, то $c(F)=4$.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 6. Пусть фигура F не является параллелограммом. Тогда, в силу теоремы 7, фигура F имеет три большие хорды. Как и при доказательстве теоремы 6, рассмотрим сперва случай, когда две большие хорды фигуры F пересекаются на ее границе (рис. 109).

Согласно лемме 12, каждая из дуг KBL и DCE может быть освещена одним направлением. При этом точки L и D могут быть выбраны сколь угодно близкими к A. Очевидно, оставшуюся дугу LAD также можно осветить одним направлением. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$c(F) \leqslant 3.$$

Перейдем ко второму случаю, когда три большие хорды AD, BE, CH фигуры F пересекаются внутри этой фигуры (рис. 110—112). Согласно лемме 12, каждую из дуг MBN, PAQ и SDT можно осветить одним направлением. Следовательно, и в этом случае $c(F) \leqslant 3$.

Наконец, как уже было показано, для любой выпуклой фигуры F справедливо неравенство

$$c(F) \geqslant 3.$$

Таким образом, если F не является параллелограммом, то $c(F) = 3$.

Теорема доказана.

§ 17. Эквивалентность двух задач

Читатель, несомненно, уже обратил внимание на то, что для любой плоской выпуклой ограниченной фигуры F числа $b(F)$ и $c(F)$ совпадают (ср. теоремы 6 и 8).

Иными словами, справедлива следующая

Теорема 9. *Для любой выпуклой фигуры F имеет место равенство*

$$b(F) = c(F).$$

Этот факт имеет место не только для плоских фигур, но и для выпуклых тел в пространстве (и даже в многомерном пространстве). Он был доказан в 1960 г. В. Г. Болтянским.

Смысл доказательства теоремы 9 заключается в следующем. Из трех теорем 6, 8, 9 достаточно доказать только две — третья, очевидно, будет их следствием. Поэтому можно было бы доказать из этих трех теорем те две, доказательства которых являются более простыми. В частности, если читателю доказательство теоремы 6 (по-видимому, более сложное) показалось утомительным и он его пропустил, то теперь, прочитав доказательство теоремы 9, он получит (с помощью теоремы 8) новое доказательство теоремы 6. Однако еще важнее то, что для пространственных тел, для которых решение задачи о покрытии и задачи освещения неизвестно до сих пор ([15]), достаточно было бы решить лишь одну из этих задач, поскольку, в силу теоремы 9, они эквивалентны. Задача освещения, по-видимому, обладает преимуществом несколько большей наглядности.

Доказательство теоремы 9.

Предположим, что плоскую выпуклую фигуру F можно покрыть m меньшими гомотетичными фигурами $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Центр гомотетии, переводящей фигуру F в F_i, обозначим через O_i, а коэффициент этой гомотетии — через

k_i $(i=1,2,\ldots,\ m)$. Таким образом, каждое из чисел $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m$ меньше единицы.

Выберем теперь произвольную внутреннюю точку A фигуры F, не совпадающую ни с одной из точек $O_1,\ O_2,\ldots,O_m$, и обозначим через $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_m$ направления, определяемые лучами $\overrightarrow{O_1A},\ \overrightarrow{O_2A},\ldots,\ \overrightarrow{O_mA}$. Мы докажем, что направления $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_m$ освещают всю границу фигуры F. В самом деле, пусть B — произвольная граничная точка фигуры F (рис. 129). Тогда точка B принадлежит хотя бы одному из множеств $F_1,\ F_2,\ldots,\ F_m$ — пусть, например, множеству F_i. Так как при гомотетии с центром O_i и коэффициентом k_i фигура F переходит в F_i, то найдется такая точка C фигуры F, которая при этой гомотетии переходит в точку B. Таким образом, $O_iB : O_iC = k_i$. Возьмем теперь на отрезке AC такую точку D, что $AD:AC = k_i$. Из равенства $O_iB : O_iC = AD : AC$ вытекает, что $BD \parallel O_iA$, т. е. прямая BD параллельна направлению l_i. Далее, так как точка C принадлежит фигуре F, а A — внутренняя точка этой фигуры, то все точки отрезка AC (кроме, может быть, точки C) являются внутренними точками фигуры F; в частности, D — внутренняя точка этой фигуры.

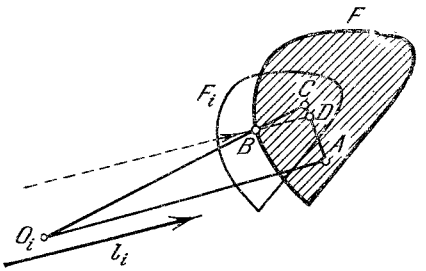


Рис. 129.

Итак, прямая BD параллельна направлению l_i и проходит через внутреннюю точку D фигуры F. Из этого следует, что B — точка освещенности относительно направления l_i. Таким образом, любая граничная точка фигуры F освещается одним из направлений $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_m$.

Мы доказали, что если фигура F может быть покрыта m меньшими гомотетичными фигурами, то для освещения ее границы достаточно m направлений. Следовательно, справедливо неравенство

$$c(F) \leqslant b(F).$$

Установим теперь справедливость обратного неравенства

$$c(F) \geqslant b(F),$$

Предположим, что s направлений l_1', l_2',..., l_s' освещают всю границу фигуры F. Проведем две опорные прямые фигуры F, параллельные направлению l_i' (рис. 130), и обозначим через A и B первые точки фигуры F, которые мы встречаем, двигаясь по этим прямым в направлении l_i'. Тогда ясно, что все точки дуги Δ_i с концами A, B (вычерченной жирно на рис. 130), кроме концевых точек A и B, являются точками освещенности относительно направления l_i'. Таким образом, множество всех точек освещенности относительно направления l_i' представляет собой некоторую дугу Δ_i без концов; это множество мы будем называть *областью освещенности* относительно направления l_i'. Так как направления l_1', l_2',..., l_s' освещают всю границу фигуры F, то соответствующие области освещенности Δ_1, Δ_2,..., Δ_s заполняют всю границу фигуры F.

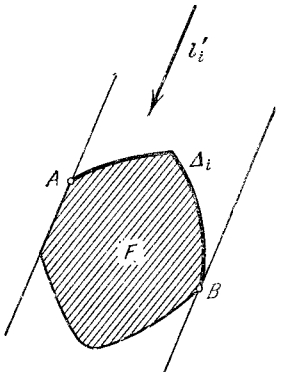


Рис. 130.

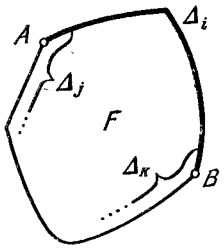


Рис. 131.

Точка A на рис. 130 не является точкой освещенности относительно направления l_i', поэтому она освещается каким-либо другим из направлений l_1', l_2',..., l_s', например, направлением l_j'. Но тогда направление l_j' освещает все точки, достаточно близкие к точке A, т. е. области освещенности Δ_i и Δ_j перекрываются (рис. 131). Точно так же второй конец B дуги Δ_i покрывается еще одной областью освещенности Δ_k.

Из того, что дуги Δ_1, Δ_2,..., Δ_s, являющиеся областями освещенности, заходят концами одна на другую, вытекает, что мы можем немножко уменьшить их, и эти уменьшенные дуги будут все еще заполнять всю границу фигуры F. Иначе говоря, можно взять такие дуги Δ_1^*, Δ_2^*,..., Δ_s^*, заключающиеся (вместе с концами) соответственно внутри дуг Δ_1, Δ_2,..., Δ_s (рис. 132), что вместе

дуги Δ_1^*, Δ_2^*,..., Δ_s^* составляют всю границу фигуры F.

Обозначим через A и B концы дуги Δ_i, а через A^* и B^* — концы дуги Δ_i^*. Прямые, проведенные через точки A^* и B^* параллельно направлению l_i', должны проходить через внутренние точки фигуры F (ибо A^* и B^* — точки освещенности относительно направления l_i'). Длины хорд, высекаемых фигурой F на этих прямых, обозначим через a и b и выберем отрезок h_i, меньший чем a и b. Тогда параллелограмм, одна сторона которого совпадает с A^*B^*, а вторая параллельна l_i' и имеет длину h_i, целиком содержится в фигуре F (рис. 133). Отсюда следует, что на любой прямой, параллельной направлению l_i' и проходящей через какую-либо точку дуги Δ_i^*, фигура F высекает хорду длины больше h_i. Это означает, что параллельный перенос дуги Δ_i^* в направлении l_i' на расстояние h_i (рис. 134) переводит дугу Δ_i^* целиком внутрь фигуры F. Иначе говоря, произведя параллельный перенос фигуры F в направлении, п р о т и в о п о л о ж н о м l_i', на расстояние h_i, мы получим фигуру F_i^*, содержащую дугу Δ_i^* *внутри* себя (рис. 135). Поэтому, выбрав внутри F_i^* произвольную точку O_i^* и производя гомотетию фигуры F_i^* с центром O_i^* и коэффициентом $k_i^* < 1$, достаточно близким к единице, мы получим фигуру F_i', гомотетичную фигуре F_i^* (а значит, и фигуре F) и содержащую дугу Δ_i^*. Это построение мы проведем для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ и получим фигуры F_1', F_2',..., F_s', гомотетичные фигуре F с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы.

Пусть теперь O — некоторая внутренняя точка фигуры F. Мы можем предполагать предыдущие построения выполненными таким образом, что каждая из фигур F_1', F_2',..., F_s' содержит точку O (рис. 136); для этого лишь нужно отрезки h_i взять достаточно малыми, а коэффициенты k_i^* — достаточно близкими к единице (ср. стр. 59—60).

Обозначим, наконец, через G_i «сектор» с вершиной O и дугой Δ_i^* (этот сектор заштрихован на рис. 136). Так как фигура F_i' выпукла и, кроме того, содержит дугу Δ_i^* и точку O, то фигура F_i' содержит весь сектор G_i. Следовательно, вместе взятые фигуры F_1', F_2',..., F_s' содержат все секторы G_1, G_2, ..., G_s. Но ясно, что секторы G_1, G_2, ..., G_s заполняют всю фигуру F (ибо дуги Δ_1^*, Δ_2^*,...

$\ldots, \Delta_s^*$ покрывают всю границу фигуры F). Поэтому фигуры F_1', F_2',..., F_s' покрывают всю фигуру F.

Мы доказали, что если вся граница фигуры F может быть освещена s направлениями, то фигура F может быть покрыта s меньшими гомотетичными фигурами. Следовательно, справедливо неравенство

$$b(F) \leqslant c(F).$$

Из доказанных неравенств $c(F) \leqslant b(F)$, $b(F) \leqslant c(F)$ и вытекает справедливость равенства

$$b(F) = c(F),$$

составляющего содержание теоремы 9.

§ 18. Разбиение и освещение неограниченных выпуклых фигур

Для неограниченных выпуклых фигур (см. рис. 22) задача Борсука теряет смысл, так как диаметр фигуры становится бесконечным. Однако задача освещения и задача покрытия фигуры меньшими гомотетичными фигурами (т. е. фигурами, гомотетичными заданной, с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы) по-прежнему сохраняют смысл. Здесь нас с самого же начала ожидает «сюрприз»: *теорема* 9 *о равенстве величин* $b(F)$ *и* $c(F)$ *перестает быть справедливой для неограниченных выпуклых фигур*.

Проще всего это увидеть на примере выпуклой фигуры, ограниченной п а р а б о л о й P. Граница P этой выпуклой фигуры F может быть освещена о д н и м направлением, т. е. $c(F) = 1$ (рис. 137, *а*). В то же время, как мы сейчас увидим, фигуру F невозможно покрыть никаким к о н е ч н ы м числом меньших гомотетичных фигур, т. е. $b(F) = \infty$. В самом деле, пусть F' — фигура, гомотетичная фигуре F с коэффициентом гомотетии $k < 1$ и центром гомотетии O, расположенным вне фигуры F (рис. 137, *б*). Проведем из точки O касательные OA и OB к параболе P, ограничивающей фигуру F. Точки A и B делят параболу P на три части: дугу AB и две бесконечные дуги Δ_1 и Δ_2, оканчивающиеся в точках A и B. Ясно, что фигура F' не содержит ни одной точки дуг Δ_1 и Δ_2 (ибо если M — какая-либо точка дуги Δ_1 или Δ_2, то на прямой OM за точкой M совсем нет точек фигуры F). Таким образом, фигура F' может содержать лишь конечный кусок параболы P

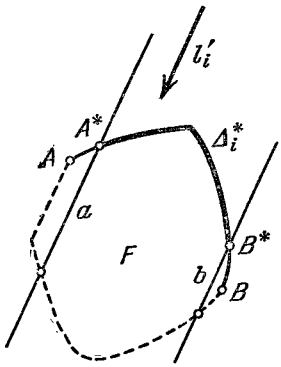


Рис. 132.

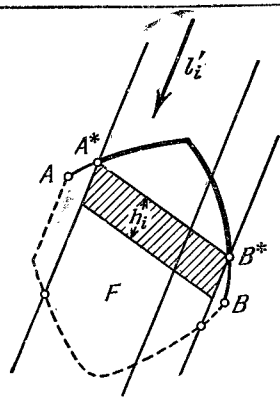


Рис. 133.

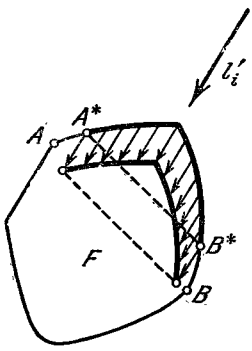


Рис. 134.

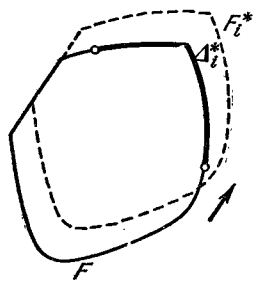


Рис. 135.

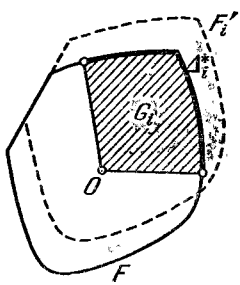
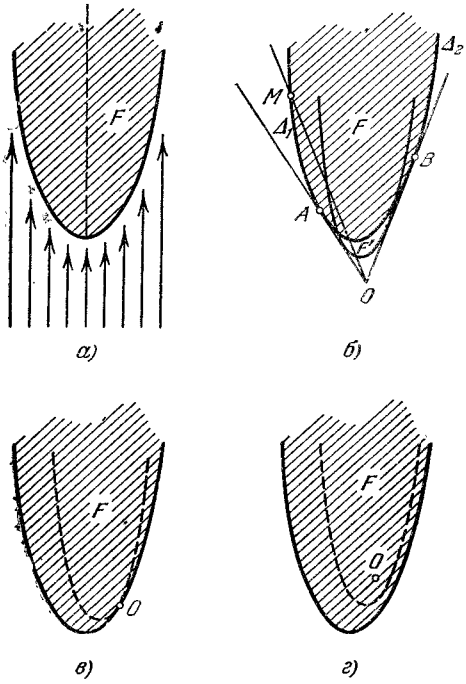


Рис. 136.

(расположенный на дуге AB). Если же центр гомотетии O принадлежит фигуре F, то фигура F' содержит не более одной точки параболы P (рис. 137, *в*, *г*). Таким образом, каждая фигура, гомотетичная F с коэффициентом



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 137.

$k < 1$, содержит лишь конечный кусок параболы P, и потому для покрытия всей фигуры F (содержащей параболу P) необходимо бесконечно много меньших гомотетичных фигур, т. е. $b(F) = \infty$.

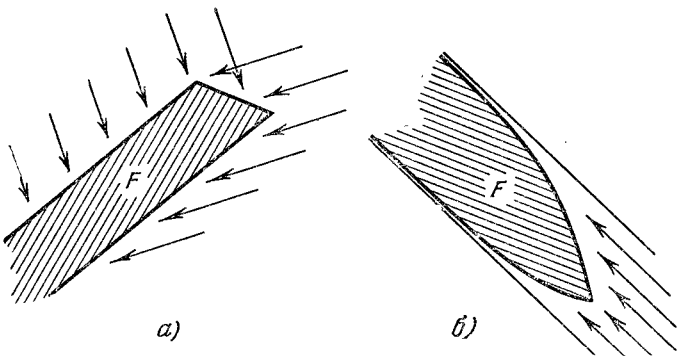
В то же время существуют и такие неограниченные выпуклые фигуры, для которых величина $b(F)$ конечна. Например, если F — полуполоса (заштрихованная на рис. 138, *а*), то $b(F) = 2$; заметим, что в этом случае $c(F)$ также равно двум, т. е. $b(F) = c(F)$.

Наконец, существуют и такие неограниченные выпуклые фигуры, для которых обе величины $b(F)$, $c(F)$ конечны, но не совпадают между собой. Например, если фигура F

расположена в полосе между двумя параллельными прямыми и все более приближается к краям этой полосы по мере удаления в «бесконечность» (рис. 138, *б*), то, как легко показать, $b(F) = 2$, $c(F) = 1$.

В связи со сказанным возникают следующие вопросы:

Для каких неограниченных выпуклых фигур сохраняется равенство $b(F) = c(F)$?



а) *б)*

Рис. 138.

Для каких неограниченных выпуклых фигур величина $b(F)$ *принимает конечные значения*?

Существуют ли неограниченные выпуклые фигуры, для которых $c(F) = \infty$?

Ответы на эти вопросы были найдены П. С. Солтаном и В. Н. Визитеем ([16]). Мы приведем их результаты без доказательств.

Прежде всего укажем, что от теоремы 9 все же кое-что остается и для неограниченных выпуклых фигур. Именно, первая часть доказательства теоремы 9 полностью сохраняется, и потому *для любой неограниченной выпуклой фигуры* F *справедливо неравенство*

$$c(F) \leqslant b(F).$$

Теперь мы сформулируем теорему, дающую ответ на второй из поставленных вопросов. Пусть F — неограниченная выпуклая фигура. Возьмем произвольную внутреннюю точку O фигуры F и рассмотрим всевозможные лучи, исходящие из точки O и целиком содержащиеся в фигуре F. Все такие лучи, вместе взятые, образуют, как нетрудно доказать, неограниченную выпуклую фигуру K;

она называется *вписанным углом* фигуры F с вершиной в точке O. Например, для параболы (рис. 139, *а*) или полуполосы (рис. 139, *б*) вписанный угол состоит только из одного луча, а для внутренней области одной ветви гиперболы вписанный угол изображен на рис. 139, *в*). (Заметим,

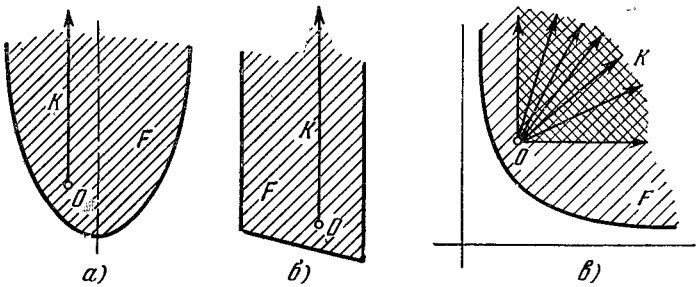


Рис. 139.

что если вместо точки O взять в качестве вершины любую другую внутреннюю точку фигуры F, то вписанный угол не изменится, а лишь подвергнется параллельному переносу.)

Далее, неограниченную выпуклую фигуру F П. С. Солтан называет *почти конической*, если существует такой отрезок r, что все точки фигуры F находятся на расстоянии, не большем r, от вписанного угла K. Так, например, фигуры, изображенные на рис. 139, *б*) и *в*), являются почти коническими. В то же время фигура, изображенная на рис. 139, *а*), не является почти конической, так как точки параболы все более и более удаляются от ее оси.

Теорема 10. *Величина $b(F)$ для неограниченной выпуклой фигуры F в том и только в том случае принимает конечное значение, если F — почти коническая фигура.*

При этом для почти конической фигуры F величина $b(F)$ может принимать лишь значения 1 и 2. Именно, пусть F — двумерная почти коническая фигура, не содержащая целиком никакой прямой; если ее вписанный угол K является лучом, то $b(F) = 2$, а если K — угол, то $b(F) = 1$. Наконец, если двумерная выпуклая фигура содержит целиком прямую, то она может быть полосой, полуплоскостью или плоскостью; в этих случаях величина $b(F)$ принимает соответственно значения 2, 1, 1. Тем самым для плоских неограниченных выпуклых фигур вопрос о значениях величины $b(F)$ полностью решается.

ПРИМЕЧАНИЯ

([1]) (к стр. 6). Приведенное в тексте определение диаметра фигуры неявно предполагает, что каждая рассматриваемая «фигура» представляет собой з а м к н у т о е множество (т. е. к фигуре причисляются все ее граничные точки). Например, если F — о т к р ы т ы й круг диаметра d (т. е. круг, к которому не причисляются точки ограничивающей его окружности), то т о ч н а я в е р х н я я г р а н ь расстояний между двумя точками фигуры F равна d; однако в этом случае не существует двух точек фигуры F, расстояние между которыми в точности равно d. Если же мы причислим к фигуре F все граничные точки (т. е. будем рассматривать з а м к н у т ы й круг), то эта точная верхняя грань будет достигаться: найдутся две точки A и B, расстояние между которыми равно d.

Вообще, если F — з а м к н у т о е ограниченное множество (на плоскости или в евклидовом пространстве произвольного числа измерений), то найдутся две точки A и B фигуры F, расстояние между которыми максимально. Действительно, пусть M и N — две произвольные точки множества F и $\rho(M, N)$ — расстояние между ними. Функция $\rho(M, N)$ н е п р е р ы в н а (по M, N). Но всякая непрерывная функция (в данном случае от двух переменных M, N), аргументы которой меняются в замкнутом ограниченном множестве, обязательно достигает своего наибольшего (и наименьшего) значения. Таким образом, найдутся такие две точки A и B фигуры F, что $\rho(A, B) \geqslant \rho(M, N)$ для любых точек M, N фигуры F. Расстояние $d = \rho(A, B)$ между такими двумя точками и представляет собой *диаметр* множества F.

([2]) (к стр. 6). В самом деле, пусть A и B — две точки многоугольника F. Если точка A не является вершиной этого многоугольника, то найдется отрезок CD, содержащий точку A внутри себя и целиком принадлежащий многоугольнику F (рис. 140, *а*, *б*). Будем, для определенности, считать, что $\angle BAC \geqslant \angle BAD$. Тогда в треугольнике ABC угол A больше или равен 90°, т. е. $\angle BAC > \angle BCA$, и потому $BC > AB$. Следовательно, AB не является диаметром фигуры F. Итак, если хотя бы одна из точек A, B не является вершиной многоугольника F, то AB не является диаметром этого многоугольника. Отсюда и вытекает, что диаметром многоугольника будет расстояние между некоторыми двумя его в е р ш и н а м и, а именно, расстояние между двумя наиболее удаленными друг от друга вершинами.

(3) (к стр. 6). Здесь идет речь о разбиении фигуры на части и о диаметрах этих частей. В соответствии с предыдущим примечанием, мы будем считать, что части, на которые разбивается фигура, сами являются замкнутыми множествами. Поэтому предложение, разъясненное в тексте, уточняется следующим образом: *если круг F диаметра d каким-либо образом представлен в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств, то хотя бы одно из этих подмножеств имеет тот же диаметр d.* Рассуждение, приведенное на стр. 6,

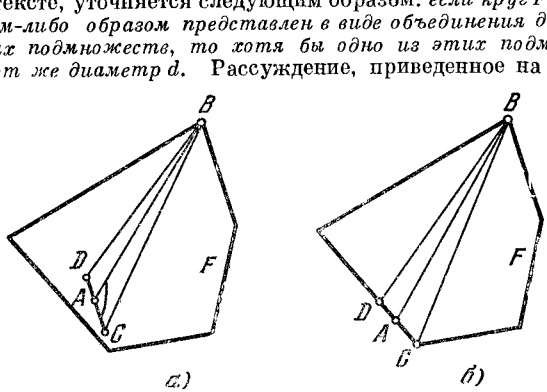


Рис. 140.

конечно, не дает полного доказательства этого утверждения. Корректное доказательство выглядит так. Обозначим через H_1 и H_2 рассматриваемые замкнутые подмножества (так что их о б ъ е д и н е н и е $H_1 \cup H_2$ дает весь круг F). Точки множества H_1, лежащие на окружности круга F, составляют некоторое множество K_1; аналогично определяется множество K_2. Таким образом, окружность круга F представляется в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств K_1 и K_2. Если одно из этих множеств, например K_2, пусто (т. е. совсем не содержит точек), то K_1 совпадает со всей окружностью; поэтому множество K_1, а значит и H_1, имеет диаметр d. Если же оба множества K_1 и K_2 непусты, то они обязательно имеют общую точку A (ибо окружность с в я з н а и потому не может быть представлена в виде объединения двух непересекающихся замкнутых подмножеств). Обозначим точку, диаметрально противоположную точке A, через B, и пусть, для определенности, точка B принадлежит множеству K_2. Тогда K_2 содержит обе точки A, B. Следовательно, множество K_2, а значит и H_2, имеет диаметр d. Итак, в любом случае хотя бы одно из множеств H_1, H_2 имеет диаметр d.

(4) (к стр. 9). Сделаем еще одно замечание по поводу «разбиения» фигуры на части. Слово «разбиение» можно понимать в том смысле, что фигура F представлена в виде о б ъ е д и н е н и я нескольких своих замкнутых подмножеств:

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$$

(именно так было в примечании (3)). В этом случае математики обычно говорят, что множества $H_1, H_2, \ldots, H_m$ составляют *покрытие* фигуры F. Однако более естественно понимать термин «разбиение» в том

смысле, что замкнутые множества H_1, H_2,..., H_m не только составляют покрытие фигуры F, но, кроме того, не перекрываются друг с другом, т. е. попарно не имеют общих внутренних точек.

Легко понять, что смысл задачи о разбиении фигуры на части меньшего диаметра не меняется в зависимости от того, какое из этих двух пониманий мы придадим термину «разбиение на части». В самом деле, если фигура F представлена в виде объединения нескольких своих замкнутых подмножеств

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$$

(возможно, перекрывающихся друг с другом), то мы можем, не увеличивая диаметров частей, «подправить» эти части так, чтобы они не перекрывались друг с другом. Для этого заметим, что множества *)

$$H_1 \setminus (H_2 \cup H_3 \cup \ldots \cup H_m),$$
$$H_2 \setminus (H_3 \cup \ldots \cup H_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_{m-2} \setminus (H_{m-1} \cup H_m),$$
$$H_{m-1} \setminus H_m,$$
$$H_m$$

составляют покрытие фигуры F и попарно не имеют общих точек. Правда, эти множества могут оказаться незамкнутыми. Однако замыкания этих множеств, т. е. множества

$$H_1' = \overline{H_1 \setminus (H_2 \cup H_3 \cup \ldots \cup H_m)},$$
$$H_2' = \overline{H_2 \setminus (H_3 \cup \ldots \cup H_m)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_{m-1}' = \overline{H_{m-1} \setminus H_m},$$
$$H_m' = H_m,$$

уже будут замкнутыми подмножествами фигуры F, попарно не имеющими общих внутренних точек и дающими покрытие фигуры F.

Таким образом, из произвольного покрытия (H_1, H_2, ..., H_m) фигуры F замкнутыми подмножествами мы получили покрытие (H_1', H_2',..., H_m'), состоящее из множеств, не перекрывающихся друг с другом. Диаметры частей при этом, конечно, не увеличились (ибо множество H_i' содержится в H_i).

([5]) (к стр. 9). Задачу о разбиении фигур на части меньшего диаметра (т. е. задачу о том, какие значения может принимать $a(F)$ можно рассматривать не только для плоских фигур, но и для пространственных тел или даже для тел в n-мерном евклидовом пространстве. Именно для n-мерных тел

*) Символом $A \setminus B$ обозначается множество, получающееся, если из множества A удалить все точки, принадлежащие множеству B.

сформулировал свою проблему К. Борсук. Полное решение проблемы было им найдено лишь для плоских фигур (теорема Борсука излагается в § 3 этой книги). Борсук доказал также, что для n-мерного шара имеет место равенство $a(F) = n + 1$ (в частности, для трехмерного, т. е. обычного, шара справедливо равенство $a(F)=4$). В связи с этим он выдвинул следующую проблему: *доказать, что для любого n-мерного тела F справедливо неравенство* $a(F) \leqslant n + 1$. Изящное решение проблемы, данное Борсуком для $n = 2$, и подкупающая простота формулировки проблемы привлекли к ней внимание многих математиков. Но для $n > 2$ проблема оказалась значительно более сложной. Лишь в 1955 г. (т. е. спустя 25 лет после постановки проблемы) английскому математику Эгглстону удалось решить проблему для $n = 3$; он доказал, что, как и предполагал Борсук, для любого трехмерного тела справедливо неравенство $a(F)\leqslant 4$. Более простые доказательства, чем у Эгглстона, были найдены два года спустя американским математиком Грюнбаумом и венгерским математиком Хеппешом. Для $n > 3$ проблема Борсука до сих пор не решена. Однако все эти вопросы мы оставляем в стороне, так как эта книжка посвящена лишь рассмотрению задач для плоских фигур. Подробнее об этом круге вопросов интересующийся читатель может прочитать в книге «Задачи и теоремы комбинаторной геометрии» тех же авторов.

([6]) (к стр. 10). Приведенное в тексте рассуждение (связанное с «приближением» прямой l к фигуре F) не дает, конечно, строгого дока-

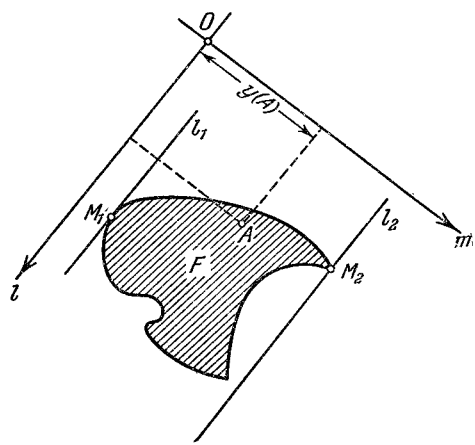


Рис. 141.

зательства существования опорной прямой l_1. Строгое доказательство можно получить, например, следующим образом. Проведем прямую l, не пересекающую фигуры F, и прямую $m \perp l$. Примем прямые l и m за оси координат (рис. 141) и обозначим для любой точки A фигуры F через $y(A)$ ее о р д и н а т у (измеряемую вдоль прямой

m). Таким образом, на фигуре F определена функция $y(A)$, причем эта функция непрерывна (ибо разность $y(A) - y(A')$ не превосходит длины отрезка AA'). Но непрерывная функция, определенная на замкнутом ограниченном множестве F, достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Иначе говоря, существуют такие точки M_1 и M_2 фигуры F, что $y(M_1) \leqslant y(A) \leqslant y(M_2)$ для любой точки A этой фигуры. Но это означает, что если мы проведем через точки M_1 и M_2 прямые, параллельные оси абсцисс l, то вся фигура F будет заключена в полосе между этими прямыми. Таким образом, прямые l_1 и l_2, проходящие через точки M_1, M_2 параллельно l, являются теми двумя опорными прямыми фигуры F, о которых идет речь в тексте (см. рис. 14).

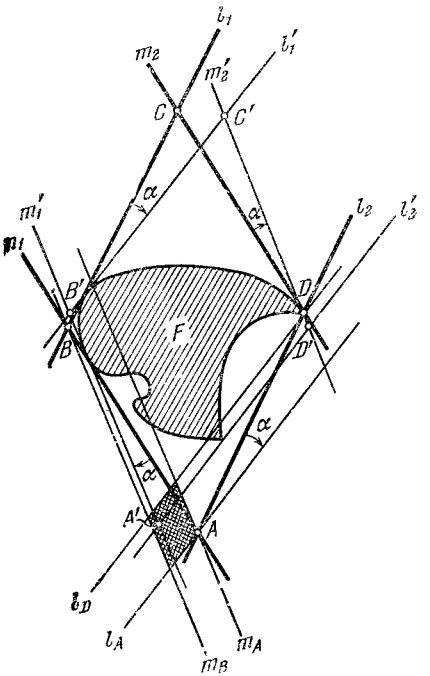


Рис. 142.

(7) (к стр. 11). Покажем, для примера, что точка A непрерывно зависит от направления прямой l_1. Допустим, что прямая l_1 повернулась на некоторый угол α (рис. 142). Положение прямых l_1, l_2, m_1, m_2 в этот момент обозначим через l_1', l_2', m'_1, m_2'. Через точки A и B проведем прямые m_A и m_B, составляющие с m_1 угол α (т. е. параллельные прямой m_1'). Так как прямая m_A рассекает фигуру F, а прямая m_B не имеет с F общих точек, то опорная прямая m_1 расположена м е ж д у m_A и m_B. Аналогично, если мы проведем через точки A и D прямые l_A и l_D, составляющие с l_2 угол α (т. е. параллельные прямой l_2'), то найдем, что опорная прямая l_2' расположена между l_A и l_D. Следовательно, точка A', в которой пересекаются опорные прямые m_1' и l_2', расположена внутри параллелограмма, образованного прямыми m_A, m_B, l_A, l_D. Но размеры этого параллелограмма (заштрихованного на рис. 142) могут быть сделаны как угодно малыми, если только угол α достаточно мал. Таким образом, точка A' как угодно близко расположена к A, если угол α достаточно мал. Это и означает, что точка A непрерывно зависит от направления прямой l_1.

(8) (к стр. 17). В самом деле, пусть M — некоторая совокупность выпуклых фигур и Ф — пересечение всех этих фигур (т. е. множество точек, каждая из которых принадлежит в с е м этим фигурам). Докажем, что фигура Ф выпукла. Пусть A и B — две точки

фигуры Ф. Возьмем произвольную фигуру F из совокупности M. Тогда точки A и B принадлежат фигуре F. Так как фигура F выпукла, то отсюда следует, что весь отрезок AB принадлежит фигуре F. Итак, к а ж д а я фигура F из совокупности M содержит отрезок AB, и потому фигура Ф содержит отрезок AB. Это и означает, что фигура Ф выпукла.

([9]) (к стр. 24). В курсе геометрии средней школы понятие п л о щ а д и определяется лишь для простейших фигур: многоугольников и круга. В действительности же понятие площади определено для значительно более широкого класса фигур. В частности, можно говорить о площади любой *выпуклой ограниченной фигуры*. Мы не приводим здесь определение площади выпуклой фигуры (см. об этом в статьях «Площадь и объем» и «Выпуклые фигуры и тела» в V томе Энциклопедии элементарной математики). Для нас важно лишь то, что каждой ограниченной выпуклой фигуре F сопоставляется некоторое положительное число $s(F)$ — площадь этой фигуры, причем если фигура F' содержит фигуру F и имеет внутренние точки, не принадлежащие фигуре F, то $s(F') > s(F)$.

([10]) (к стр. 26). Итак, H определяется как объединение *возрастающей последовательности* выпуклых фигур H_0, H_1, H_2, ..., H_n, ... (т. е. такой последовательности, что каждая фигура содержит предыдущую). В тексте доказывается, что фигура H выпукла и имеет диаметр d. Заметим, однако, что объединение возрастающей последовательности выпуклых фигур может оказаться н е з а м к н у т о й выпуклой фигурой. Например, пусть F_1, F_2, ..., F_n...,—возрастающая последовательность кругов (замкнутых), причем все круги внутренним образом касаются друг друга в точке M и радиус круга F_n равен $1 - 1/2^n$ (рис. 143). Тогда объединение этой возрастающей последовательности выпуклых фигур будет представлять собой круг радиуса 1, причем точка M причисляется к этому кругу, а остальные граничные точки — нет. Иначе говоря, указанное объединение является н е з а м к н у т о й выпуклой фигурой.

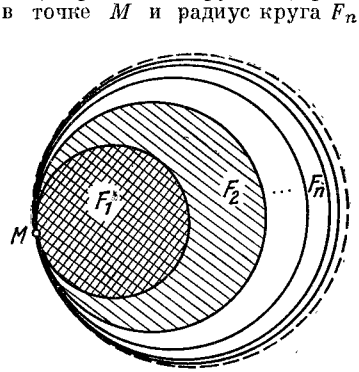


Рис. 143.

Так как мы условились рассматривать лишь *замкнутые* выпуклые фигуры, то H, строго говоря, следовало бы определить так: берется объединение всех фигур H_0, H_1, H_2, ..., H_n, ... и к полученной выпуклой фигуре (которая может оказаться незамкнутой) добавляются все ее граничные точки. Однако существа дела это не меняет.

([11]) (к стр. 33). Заметим, что для случая пространственных (трехмерных) тел доказанная теорема непосредственно не обобщается. Так, например, для *правильного тетраэдра* F с ребром d мы имеем, очевид-

но, $a(F)=4$, т. е. $a(F)$ принимает свое максимальное значение. В то же время тело F неоднозначно дополняется до тела постоянной ширины d (см. стр. 103—104 указанной на стр. 13 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского). Таким образом, равенство $a(F)=4$ в случае пространственных тел диаметра d связано с какими-то более тонкими обстоятельствами, чем однозначность дополнения до тела постоянной ширины d.

([12]) (к стр. 42). В самом деле, пусть l и l' — две параллельные опорные прямые фигуры F (рис. 144), и пусть A, B — общие точки этих прямых с фигурой F. Проведем в плоскости Минковского круг K_A с центром в точке A, для которого прямая l' является опорной. Тогда радиус h этого круга равен расстоянию между прямыми l и l', т. е. равен ширине фигуры F в направлении l. Точка B либо лежит на границе круга K_A, либо расположена вне этого круга. Поэтому дл.$_G$ $AB \geqslant h$ и, значит, подавно диаметр d фигуры F больше или равен h. Итак, ширина фигуры F в любом направлении не превосходит d, а потому и наибольшая ширина не превосходит d.

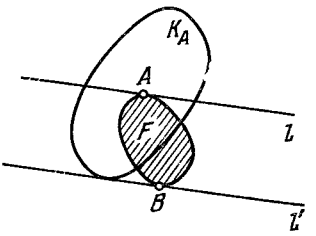


Рис. 144.

Остается доказать, что найдется такое направление, что ширина фигуры F в этом направлении равна d. Пусть M и N — две точки фигуры F, расстояние между которыми равно d. Тогда круг K_M радиуса d с центром в точке M содержит целиком фигуру F. Точно так же круг K_N радиуса d с центром N содержит F (рис. 145). Проведем опорную прямую n к кругу K_M, проходящую через точку N. Тогда прямая m, параллельная прямой n и проходящая через точку M, является опорной прямой круга K_N. Ясно, что вся фигура F расположена в полосе между прямыми m и n, так что m и n являются опорными прямыми фигуры F. Из построения ясно, что расстояние между прямыми m и n (т. е. ширина фигуры F в направлении m) равно радиусу круга K_M, т. е. равно d.

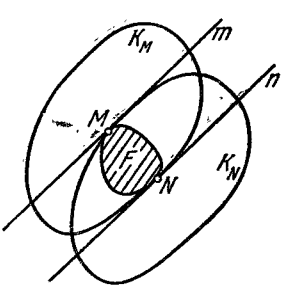


Рис. 145.

([13]) (к стр. 43). Приведем доказательство этого утверждения, используя понятие *суммы выпуклых фигур* (см. § 4 указанной на стр. 13 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского).

Пусть F—произвольная выпуклая фигура и F'— фигура, симметричная ей относительно некоторой точки O. Сумму $F+F'$ обозначим через G. Тогда G есть центрально-симметричная выпуклая фигура, которую мы и примем за единичный круг в плоскости Минковского. Ясно, что ширина фигуры F в любом направлении l равна ширине

фигуры F' в том же направлении (рис. 146). Следовательно, ширина фигуры G в произвольном направлении l вдвое больше ширины фигуры F в том же направлении.

Но ширина фигуры G в любом направлении равна 2 (так как G — единичный круг). Таким образом, ширина фигуры F в любом направлении равна 1, т. е. F является (в геометрии Минковского, определяемой единичным кругом G) фигурой постоянной ширины 1.

Разумеется, если в качестве единичного круга взять не фигуру $G = F + F'$, а любую фигуру, гомотетичную $F + F'$, то и в такой геометрии F будет фигурой постоянной ширины.

С другой стороны пусть в некоторой геометрии Минковского фигура F является фигурой постоянной ширины. Тогда, очевидно, F' также будет фигурой постоянной ширины, а потому фигурой постоянной ширины будет и $F + F'$. Но фигура $F + F'$ центрально-симметрична, а, как легко видеть, центрально-симметричная выпуклая фигура только в том случае имеет постоянную ширину, если она является кругом в рассматриваемой геометрии Минковского.

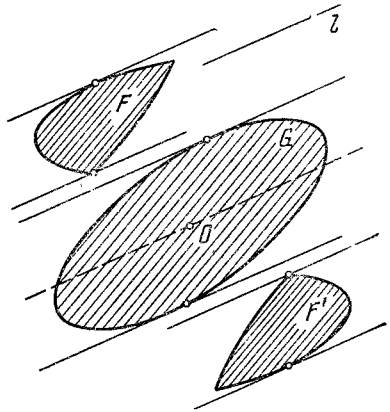


Рис. 146.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Фигура F в том и только в том случае является фигурой постоянной ширины в плоскости Минковского с единичным кругом G, если сумма $F + F'$ фигуры F с центрально-симметричной ей фигурой F' является в этой геометрии кругом.*

Из этой теоремы и вытекает, что всякая выпуклая фигура F является фигурой постоянной ширины в геометрии Минковского с единичным кругом k ($F + F'$) и только в этой геометрии (k — произвольное положительное число).

([14]) (к стр. 52). Пусть F — выпуклая ограниченная фигура и G — некоторая ее часть (т. е. замкнутое подмножество). Рассмотрим всевозможные фигуры, гомотетичные F с коэффициентами гомотетии, не превосходящими единицы, и содержащие фигуру G. Точную нижнюю грань всех коэффициентов гомотетии для таких гомотетичных фигур мы обозначим через k_0. Если $k_0 = 1$, то габарит части G равен 1 (ибо не существует фигуры, гомотетичной F с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, и содержащей фигуру G). Пусть $k_0 < 1$. Тогда мы можем выбрать такую последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_q, \ldots$ фигур, гомотетичных F соответственно с центрами гомотетии O_1, O_2, ..., O_q, ... и коэффициентами гомотетии k_1, k_2, ..., k_q, ..., что каждая из этих фигур содержит G и имеет место равенство $\lim\limits_{q\to\infty} k_q = k_0$. При этом мы можем считать, что справедливы неравенства

$$1 > k_1 > k_2 > \ldots > k_q > \ldots > k_0.$$

Нетрудно понять, что все точки O_1, O_2, ..., O_q, ... расположены на расстоянии, не большем $\frac{d}{1-k_1}$ от фигуры F (где d — диаметр фигуры F). В самом деле, допустим, что точка O_q расположена от F на расстоянии, большем $\frac{d}{1-k_1}$. Тогда для произвольной точки A фигуры F мы имеем $O_qA > \frac{d}{1-k_1}$. При гомотетии с центром O_q и коэффициентом k_q точка A переходит в такую точку A', что $O_qA' = k_q \cdot O_qA$. Поэтому имеем $AA' = (1-k_q)\cdot O_qA > (1-k_1)\cdot O_qA > d$. Таким образом, каждая точка A фигуры F смещается при этой гомотетии на расстояние, большее d, т. е. переходит в точку A', н е п р и н а д л е ж а щ у ю фигуре F. Иначе говоря, фигура F_q, в которую переходит F при рассматриваемой гомотетии, не имеет общих точек с F. Но это противоречит тому, что фигура F_q содержит часть G фигуры F.

Итак, все точки O_1, O_2, ..., O_q, ... расположены на конечном расстоянии от F. Поэтому последовательность O_1, O_2, ..., O_q, ... имеет хотя бы одну предельную точку. Без ограничения общности можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что последовательность O_1, O_2, ..., O_q, ... имеет т о л ь к о о д н у предельную точку O_0, т. е. существует п р е д е л $\lim\limits_{q\to\infty} O_q = O_0$.

Легко понять, что фигура F_0, гомотетичная фигуре F с центром гомотетии O_0 и коэффициентом k_0, содержит фигуру G (ибо $\lim\limits_{q\to\infty} k_q = k_0$, $\lim\limits_{q\to\infty} O_q = O_0$). Таким образом, существует фигура F_0, гомотетичная F с коэффициентом k_0, содержащая G, но никакая фигура, гомотетичная F с коэффициентом, меньшим k_0, не может целиком содержать G (по определению точной нижней грани). Это означает, что k_0 есть габарит части G. Тем самым установлено, что понятие габарита имеет смысл для любой части G фигуры F.

([15]) (к стр. 71). Задача освещения становится значительно более интересной и трудной для пространственных тел и тел в n-мерном пространстве. Более подробно имеющиеся здесь результаты и нерешенные проблемы освещены в книге В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга, указанной во введении. Отметим лишь, что для ограниченных трехмерных выпуклых тел (и даже для трехмерных многогранников) до сих пор неизвестно, всегда ли справедливо неравенство $c(F) \leqslant 8$.

([16]) (к стр. 78). Задачи о покрытии и освещении неограниченных фигур становятся особенно интересными в трехмерном и многомерном пространстве. Как доказал П. С. Солтан, теорема 10 справедлива для фигур любого числа измерений. В частности, им полностью решена задача о покрытии неограниченных трехмерных тел гомотетичными меньшими телами. Именно, в этом случае $b(F)$ может принимать лишь значения 1, 2, 3, 4, ∞.